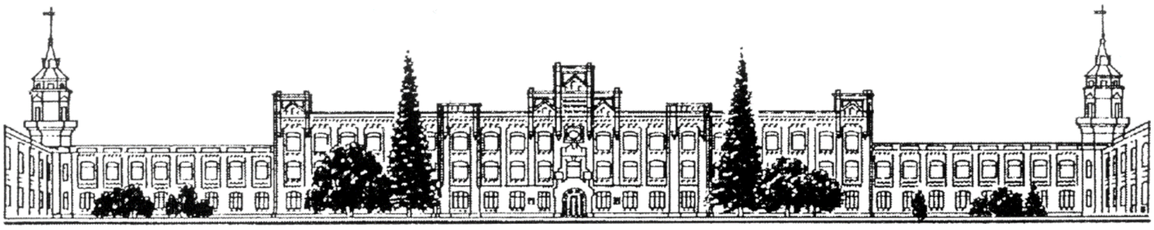
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»



ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА:
КУРС ЛЕКЦІЙ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для підготовки студентів спеціальності
172 – «Телекомунікації та радіотехніка»

КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Інженерна графіка: курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для підготовки студентів спеціальності 172 – «Телекомунікації та радіотехніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.П. Колосова. – Електронні текстові данні(1 файл: 4.41 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 51 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 28.11.2019 р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 8 від 28.10.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА: КУРС ЛЕКЦІЙ

Укладач:	*Колосова Олена Петрівна,* канд. техн. наук, доц.
Відповідальний редактор	*Ванін Володимир Володимирович,* доктор техн. наук, проф.
Рецензенти:	*Правило Валерій Володимирович*, канд. техн. наук, доц. кафедри інформаційно-телекомунікаційних мереж, Інститут телекомунікаційних систем, КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Розглядаються основні питання нарисної геометрії: проекціювання точки, прямої, площини, методи моделювання поверхні, а також методи побудови ліній перетину поверхонь площинами. В посібнику також надаються методичні рекомендації до розв'язання основних задач. Призначення посібника – закріпити та поглибити теоретичний програмний матеріал, підвищити рівень його засвоєння.

Введення

Навчальний посібник призначений для студентів нетехнічних спеціальностей, які вивчають курс «Інженерної та комп'ютерної графіки» за скороченою програмою, і відповідає програмі цього курсу.

Курс складається з трьох частин: нарисна геометрія, технічне креслення і комп'ютерна графіка. У навчальному посібнику викладений теоретичний матеріал з першої частини, а саме, з нарисної геометрії.

Не секрет, що для сучасних студентів виконання графічних побудов і рішення геометричних задач є досить складним завданням в силу необхідності застосування просторової уяви, якою, за деякими даними, володіють лише 25% студентів. Вивчення курсу викликає у студентів посилену роботу просторової уяви і тим самим розвиває її.

Окрім теоретичних основ створення зображень і геометричних перетворень, у посібнику наведено порядок рішення основних геометричних задач на конкретних прикладах з докладним аналізом раціональних варіантів побудови зображень, що має сприяти більш глибокому розумінню сутності окремих питань, посиленню знань основ теорії зображень, що є досить актуальним в умовах обмеженості часу. В кінці кожного розділу приведений перелік питань для оперативного поточного контролю і самоконтролю якості засвоєння студентами навчального матеріалу.

Для більш глибокого вивчення курсу програмою передбачено проведення практичних занять, на яких вирішуються аудиторні завдання, і самостійне виконання домашніх завдань, приведених в робочому зошиті. Для закріплення засвоєного матеріалу студенти самостійно виконують Домашню контрольну роботу, яка включає виконання двох епюрів за темами: «Заміна площин проекцій» та «Перетин поверхонь».

У курсі прийняті такі позначення та умовності:

— точки позначають великими літерами латинського алфавіту *A, B, C* …, а також цифрами *1, 2, 3*…;

— прямі та криві лінії — малими літерами латинського алфавіту *a, b, c,* …;

— площини — великими літерами грецького алфавіту Σ, Ω, Г, Δ. . .;

— кути — малими літерами грецького алфавіту α, β, γ. . .

Для відображення співвідношення між геометричними об'єктами застосовуються такі символи:

|| – паралельність;
∩ – перетин;
⊥ – перпендикулярність;
∟ – прямий кут;
°/ – мимобіжність;
∪ – з'єднання точок;
≡ – збіг геометричних об'єктів;
= – результат дії;
∈ – належність точки до інших об'єктів;
⊂ – належність елементів (крім точки) до інших об'єктів;

Лекція 1. Проекціювання точки

Поняття, які необхідно засвоїти: *комплексний рисунок* (*епюр), площина проекції (горизонтальна, фронтальна, профільна), модель точки, проекція точки (горизонтальна, фронтальна, профільна), визначник точки, лінія зв'язку (горизонтальна, вертикальна), проекційний метод, координатний метод, стала кресленика .*

1.1. Предмет нарисної геометрії

В ієрархії наук нарисна геометрія знаходиться між математикою та машинобудуванням і архітектурою. Це розділ геометрії, що вивчає методи зображення тривимірних об'єктів, використовуючи двовимірні проекції. Вона вчить, як розуміти, уявляти, проектувати і зображати геометричні фігури.

Засновником науки «Нарисна геометрія» вважається французький вчений, Гаспар Монж (1746 - 1818).

З моменту свого виникнення нарисна геометрія була методом вивчення 3Д-геометрії об'єктів через їх 2Д-зображення, вона забезпечувала розуміння структури, метричних властивостей просторових об'єктів, процесів і принципів [5]. Вивчення нарисної геометрії забезпечує підготовку інтелектуальних здібностей людини до сприйняття простору, і тому має незаперечне значення для інженерної освіти.

«Нарисна геометрія вчить виготовляти такі креслення, в яких предмет зображується майже таким, як ми його бачимо, і до того ж так, що за накресленими лініями можна в точності визначити розміри і істинний вигляд зображуваного» (Енциклопедія Брокгауза Ф.А. і Ефрона І.А., 12 видання).

Нарисна геометрія унікальна в тому, що вона сприяє розвитку просторового мислення, яке є фундаментальним для будь-якої творчої діяльності інженера, вона навчає здатності «висловлювати» просторові ідеї в графічному вигляді, щоб вони стали зрозумілими будь-кому.

1.2. Методи проекціювання

Основним способом відображення в нарисній геометрії є *проекціювання*, а одержане при цьому зображення називається *проекцією*.

Для отримання проекцій слід задати площину проекцій та проекціювальний промінь. Цей промінь, проходячи через задану точку простору, перетне площину проекцій в точці, яка і буде проекцією даної точки на дану площину.

Нарисна геометрія вивчає різні методи побудови проекці. Найпоширенішими з них є центральне проекціювання (коли проекціювальний промінь заданий центром S, рис.1.1) і паралельне проекціювання (коли проекціювальний промінь заданий напрямком s, рис1.2).

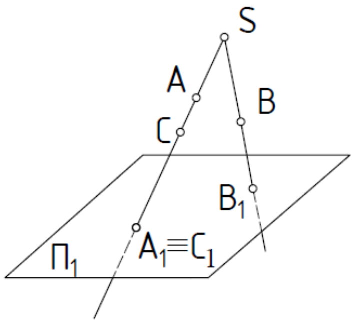


Рис.1.1

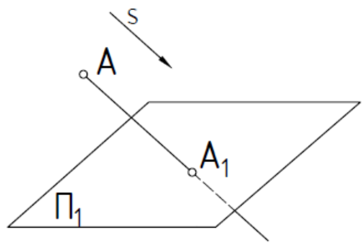


Рис.1.2

До паралельних проекцій відносяться *ортогональні (або прямокутні)* проекції, *аксонометричні* проекції та *проекції з числовими відмітками* (останні застосовуються в геодезії, топографії, будівництві тощо, не вивчаються в даному курсі).

В інженерній практиці, як правило, використовують *ортогональне* проекціювання, коли проекціювальний промінь проходить перпендикулярно до площини проекцій ($s \perp \Pi_1$, Рис.1.3). Воно забезпечує простоту визначення проекцій геометричних об'єктів, а також дозволяє зберегти форму і розміри цих об’єктів на їх проекціях.

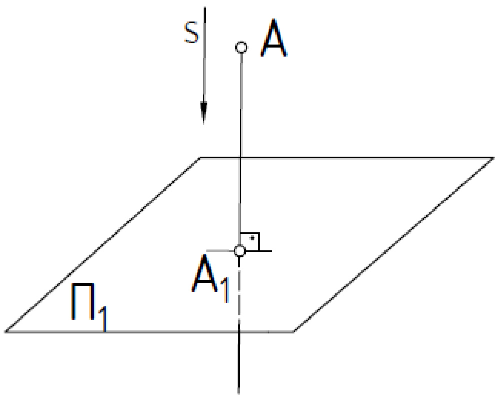


Рис.1.3

Всі ці методи проекціювання однозначно визначають проекцію точки (об’єкта) на площині. Але вирішення зворотної задачі, тобто однозначне визначення положення точки (об’єкта) в просторі за однією проекцією, не є можливим (проекції точок А і С на рис.1 збігаються), тобто зображення не є *оборотним* (російською мовою «обратимое изображение»). Щоб зображення було *оборотним*, необхідно мати хоча б дві зв’язані між собою проекції.

1.3 Комплексний рисунок точки

Оскільки будь-який об’єкт представляє собою сукупність точок, то перш за все необхідно ознайомитися з методом задання точки.

Проекціювання будемо вести на три взаємно перпендикулярні площини (Рис1..4). Таку систему площин називають *прямокутною системою площин проекцій*. Прямі О*x*, О*y*, О*z*, в яких ці площини перетинаються, називаються *осями проекцій*, а початок координат О – *початком проекцій*.

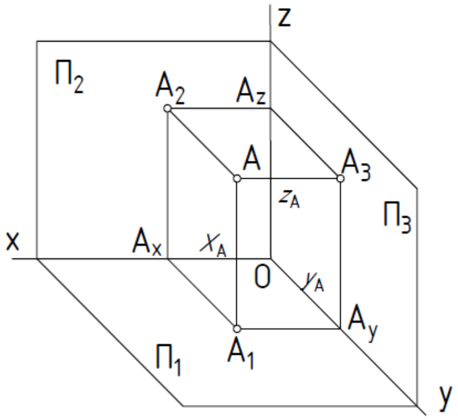


Рис.1.4

$П_1$ – *горизонтальна площина проекцій*;
$П_2$ – *фронтальна площина проекцій*;
$П_3$ – *профільна площина проекцій;*

A_1 – *горизонтальна проекція точки* А;
A_2 – *фронтальна проекція точки* А;
A_3 – *профільна проекція точки* А.

Будь-яку точку простору можна задати трьома координатами. На Рис.4 точка А має координати x_A, y_A, z_A. В нарисній геометрії будь-яку точку простору можна задати її проекціями, при чому, лише двома:

$$A(A_1;A_2)\ ,\ A(A_1;A_3)\ і\ A(A_2;A_3) \qquad (1)$$

Дійсно, нехай точка А задана своїми проекціями A_1 і A_2: $A(A_1;A_2)$. Проекція A_1 має координати x_A, y_A : $A_1(x_A;\ y_A)$, проекція A_2 має координати x_A, z_A : $A_2\ (x_A,\ z_A)$. Отже, точка А повністю визначена трьома координатами.

Вирази (1) називаються *визначниками точки*.

Щоб використання прямокутної системи було зручним, її переводять, як тепер говорять, у формат 2D. Для цього систему площин умовно «розрізують» уздовж осі 0у, а площини $П_1$ і $П_3$ суміщують з площиною $П_2$ (рис.1.5). В результаті отримують рисунок, який називається *комплексним рисунком* точки або *епюром* (епюр Монжа) (рис.1.6).

На епюрі вісь 0*y* належить двом площинам одночасно ($П_1$ і $П_3$), тому іноді її позначають відповідним індексом.

На Рис. 6 проекції A_1 і A_2 з'єднані відрізком A_2A_1 , який проходить перпендикулярно до осі О*x*. Цей відрізок називається *вертикальною лінією зв'язку.* Відповідно, відрізок $A_2A_3 \perp Oz$ називається *горизонтальною лінією зв'язку*.

Лінія зв'язку між проекціями A_1 і A_3 має комбінований вигляд. Вона складається з горизонтальної і вертикальнрої ліній і її побудова буде розглянута пізніше (рис.1.9,*в* і рис.1.10,*в*).

Отже, *лінія зв’язку* – це відрізок, що з’єднує дві проекції точки і проходить перпендикулярно до осі.

Вірним є і обернене твердження: проекція точки лежить на перетині двох ліній зв’язку.

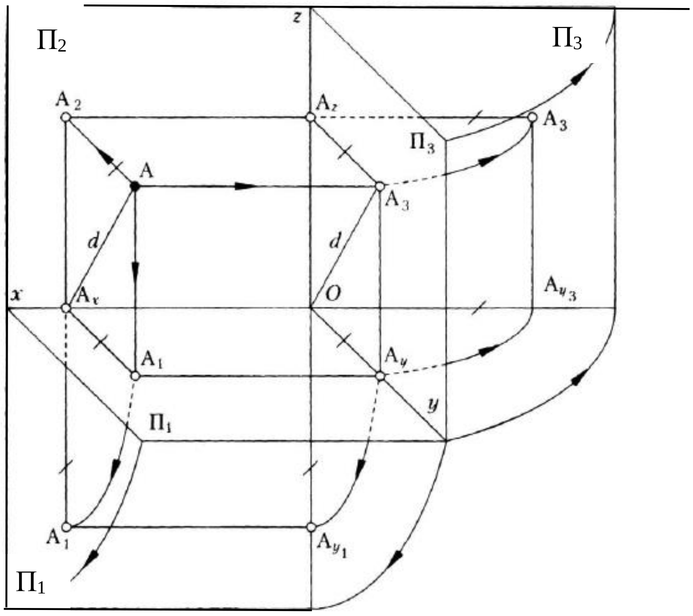


Рис.1.5 [1]

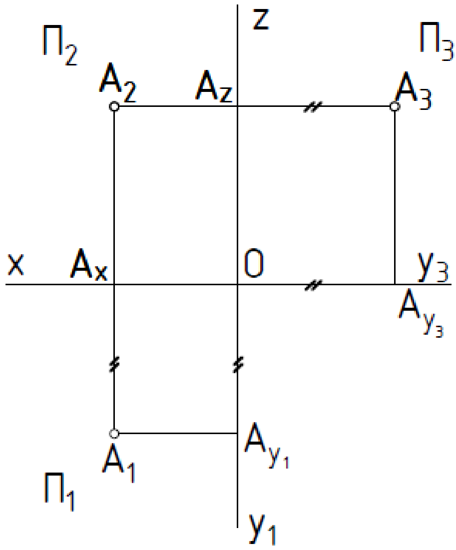


Рис.1.6

На комплексному рисунку (епюрі) можна зобразити будь-яку точку простору за її прямокутними координатами.

1.4. Пряма і обернена задачі

В нарисній геометрії існує два типи задач: *пряма* задача і *обернена*.

Пряма задача – побудувати об’єкт за заданими параметрами. Задача 1.1 – приклад такої задачі.

<u>Задача 1.1</u> Побудувати проекції точки A(30;15;20) (рис.1.7) .

Точка задана своїми координатами. Відкладаємо вздовж осей відповідні відстані в **міліметрах**. Проводимо лінії зв’язку. На їх перетині отримуємо проекції точки.

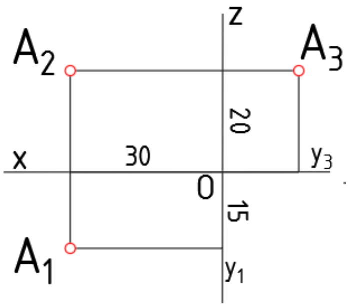


Рис.1.7

Обернена задача – за зображенням об’єкта на комплексному рисунку визначити його форму, положення і метричні властивості (розміри), а також побудувати ще одне його зображення (вид, розріз).

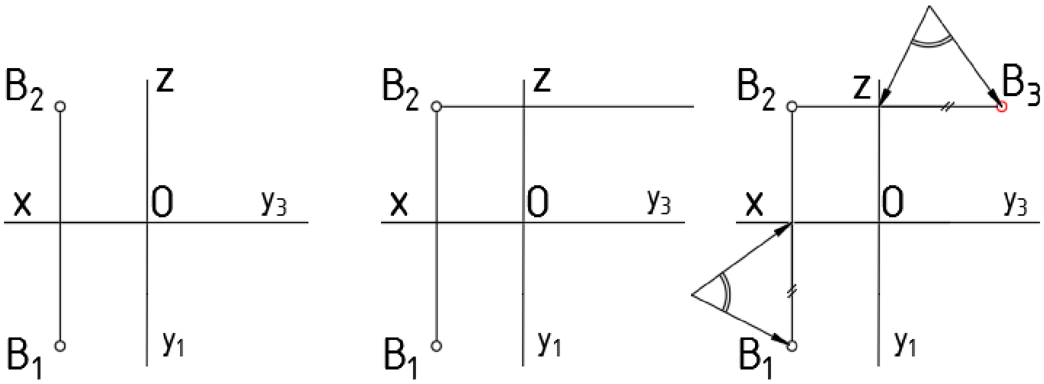
Існує три способи побудови третього зображення. Це *координатний, проекційний* та за допомогою *сталої кресленика.* В усіх трьох випадках, побудова виконується геометричними методами, без вимірювання відстаней.

Розглянемо ці способи.

<u>*Задача1. 2*</u>. Точка B задана двома проекціями: B(B_1;B_2). Побудувати третю проекцію. (рис.1.8*а*).

1. Координатний спосіб.

Відомо, що проекція B_3 знаходиться на одній лінії зв’язку (горизонтальній) з проекцією B_2. Проводимо її (рис.1.8*б*). Вздовж цієї лінії зв’язку, від осі z, за допомогою циркуля відкладаємо відстань, що дорівнює координаті *y* (рис.1.8*в*). Отримана точка – проекція B_3.

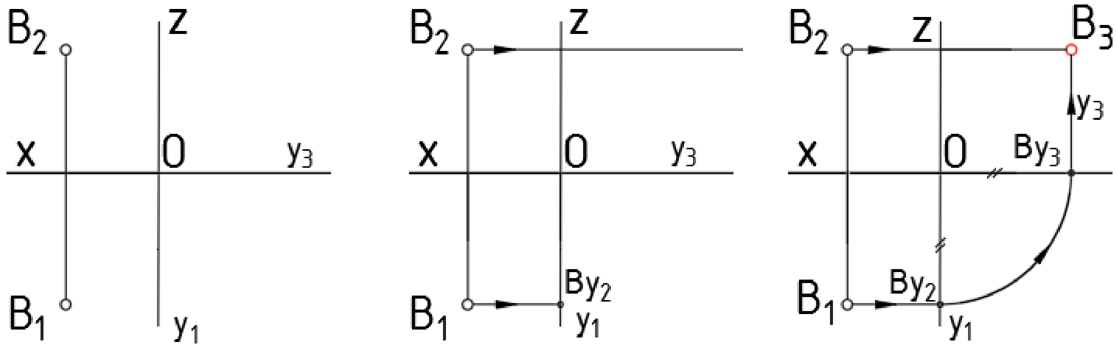


а *б* *в*

Рис.1.8

2. Проекційний спосіб.

Проводимо дві горизонтальні лінії зв’зку: одну – з проекції B_1 до осі *y*, отримуємо точку By_2 , другу – з проекції B_2 (рис.1.9*б*). За допомогою циркуля проводимо дугу з центром в точці O, радіусом OBy_2, отримуємо точку By_3. З точки By_3 проводиму вертикальну лінію зв’язку і на перетині з горизонтальною маємо проекцію B_3 (рис.1.9*в*).

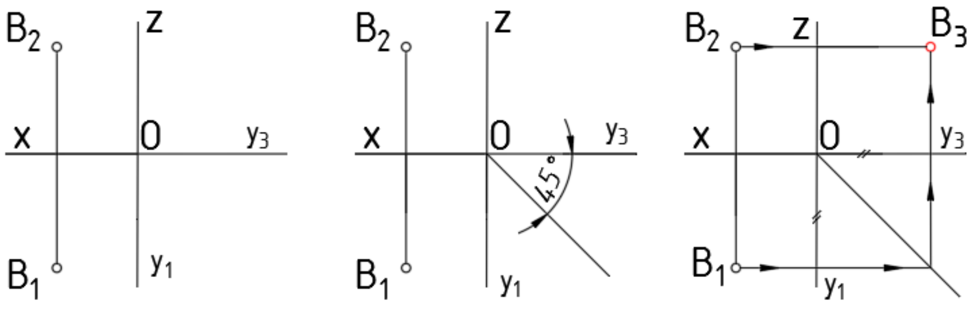


а *б* *в*

Рис.1.9

3. Побудова за допомогою сталої кресленика.

Стала кресленика – це пряма, яку будують в проміжку між площинами $П_1$ і $П_3$. Вона проходить через точку О і є бісектрисою кута між променями Oy_2 і Oy_3 (рис.1.10*б*).



а *б* *в*

Рис.1.10

Будуємо сталу кресленика. Проводимо дві горизонтальні лінії зв'язку: одну – з проекції B_2, другу – з проекції B_1 до перетину з сталою кресленика. З точки перетину проводимо вертикальну лінію зв'язку і на перетині її з горизонтальною маємо проекцію B_3 (рис.1.10*в*).

Рішення позиційної задачі.

За координатами точки або за допомогою її комплексного рисунку можна визначити положення точки відносно площин проекції.

- Якщо всі координати точки не дорівнюють 0, то точка належить простору (точка А на рис.1.11). І навпвки: якщо точка належить простору, то всі її координати не дорівнюють 0.
- Якщо одна координата дорівнює 0, то точка належить одній з площин проекцій (на Рис.11 точка $B \in П_1$, оскільки $z = 0$). І навпаки: якщо точка належить одній з площин проекцій, то одна координата дорівнює 0.
- Якщо дві координати дорівнюють 0, то точка належить одній з осей (на Рис.11 точка $C \in Oz$, оскільки $x = 0$ і $y = 0$). І навпвки: якщо точка належить одній з осей, то дві її координати дорівнюють 0.
- Якщо всі координати дорівнюють 0, то точка лежить в початку проекцій. І навпаки: якщо точка належить початку проекцій, то всі її координати дорівнюють 0.

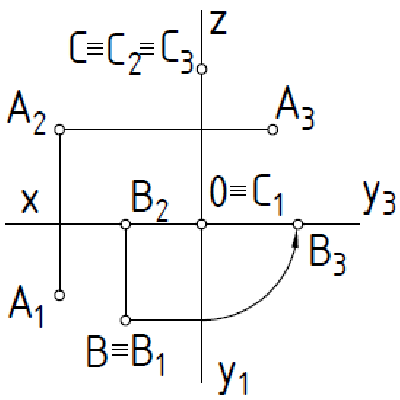


Рис.1.11

Правила виконання епюрів.

Епюри слід офорлювати згідно вимог до оформлення конструкторської докумертації, тобто, згідно вимог ДСТУ ГОСТ.

Кресленик виконується олівцем НВ або В (твердо-м'яким або м'яким) за допомогою лінійки і циркуля. Відповідь наводиться червоним олівцем (рис1.7).

Осі і лінії зв'язку проводяться тонкими лініями, прямі і площини – основними (ГОСТ 2.303-68).

Проекції точок зображуються у вигляді кіл діаметром 2 – 2,5мм.

Проекції точок позначають великими літерами латинського алфавіту, висотою 5 або 7мм (шрифт №5 або №7, ГОСТ 2.304-81).

Площини проекціювання на епюрах позначають великою літерою П («пі») грецького алфавіту (зазвичай, не позначають, окрім задач з перетворення площин).

Питання до теми.

1. Як називаються площини проекцій?
2. Що таке епюр точки?
3. Що є визначником точки?
4. Що таке лінія зв'язку і як вона будується?
5. Як визначити третю проекцію точки?
6. Що таке стала кресленика?
7. Умови належності точки площині проекцій або осям.
8. Як визначити відстань від точки до площини проекцій?*

Лекція 2. Проекціювання прямої

Поняття, які необхідно засвоїти: *визначник прямої, комплексний рисунок прямої, взаємне положення точки та прямої, конкуруючі точки, пряма загального положення, пряма окремого положення, пряма рівня, фронталь, горизонталь, проекціююча пряма, взаємне розташування двох прямих, перетворення (заміна) площин проекцій, натуральна величина відрізка прямої.*

Прочитати комплексний рисунок прямої – це :

1) визначити її місце в просторі; визначити кути нахилу до площин проекцій.

2) визначити взаємне положення:

   а) точок простору відносно прямої;

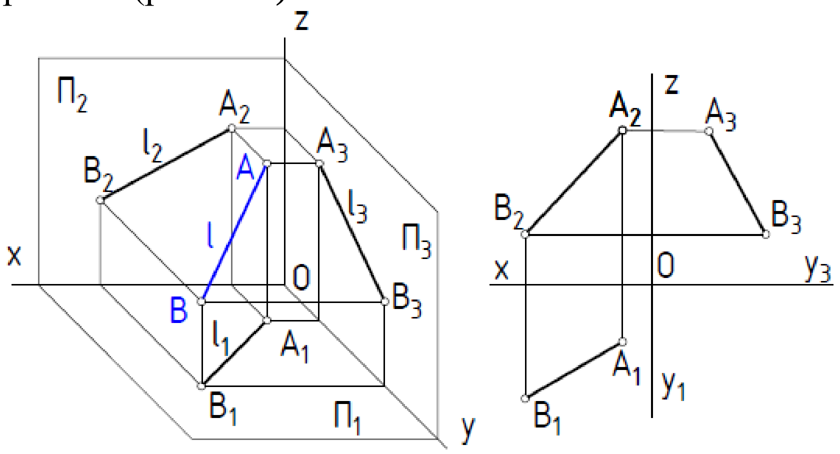
   б) прямих між собою;

   в) прямих відносно площин проекцій;

3) знайти натуральну величину відрізка прямої.

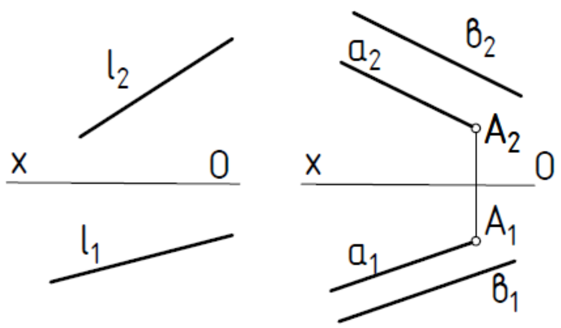
2.1. Комплексний рисунок прямої

Положення прямої в просторі визначається двома точками (рис.2.1) або точкою та напрямком (рис.2.2*б*).



а *б*

Рис.2.1



а *б*

Рис.2.2

Якщо визначником прямої є дві її точки, то форма запису:

l(А;В).

Якщо визначником прямої є її проекції (рис.2.2а), то форма запису:

$l(l_1;l_2)$.

На рис.2.2*б* пряма задана точкою А і умовою: $a \| в$. Форма запису:

a(А; $a \| в$).

2.3. Положення прямої відносно площин проекцій

Якщо пряма паралельна або перпендикулярна площині проекцій, то така пряма називається *прямою окремого положення*.

Пряма окремого положення може бути або прямою *рівня*, або *проекціюючою* прямою.

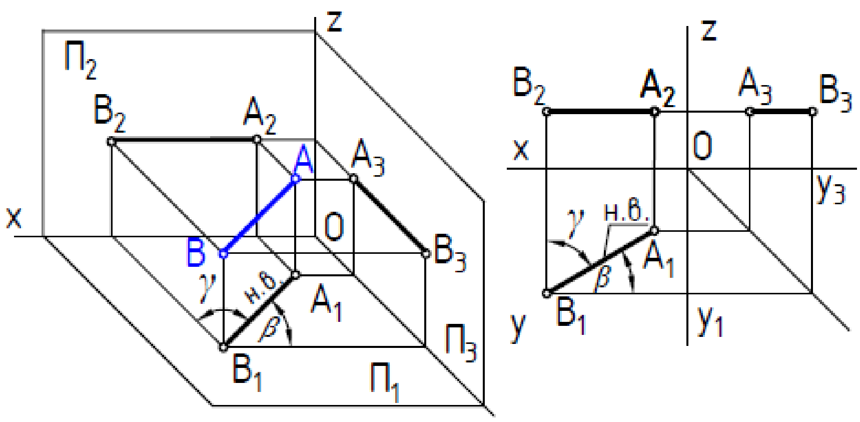
Пряма, паралельна до будь-якої площини проекцій і не перпендикулярна до інших, називається *прямою рівня*. Пряма рівня проецюється на площину, до якої вона паралельна, в натуральну величину.

Вирізняють три лінії рівня:

1) ***горизонталь*** – це пряма, паралельна до горизонтальної площини $П_1$ (рис.2.3). На $П_1$ в натуральну величину проецюється:

- будь-який відрізок, що лежить на горизонталі: A_1B_1 = AB, A_1B_1 – натуральна величина відрізка AB, скорочено н.в.;

- кути β і γ.



а *б*

Рис.2.3

2) ***фронталь*** – це пряма, паралельна до фронтальної площини $П_2$ (рис.2.4). При цьому, на $П_2$ в натуральну величину проецюється:

- будь-який відрізок, що лежить на фронталі: C_2D_2 = CD, C_2D_2 н.в. відрізка CD;

- кути α і γ.

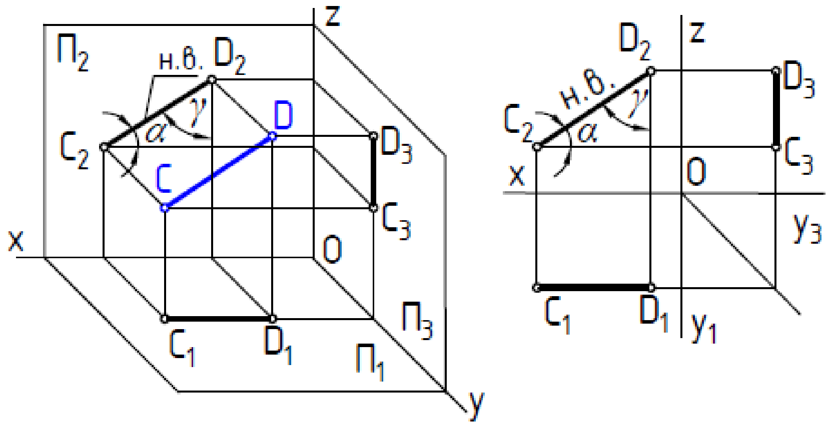


Рис.2.4

3) ***профільна пряма*** – це пряма, паралельна до профільної площини Π_3 (рис.2.5). При цьому, на Π_3 в натуральну величину проецюється:

- будь-який відрізок, що лежить на профільній прямій: $E_3F_3 = EF$, E_3F_3 н.в. відрізка EF;

- кути α і β.

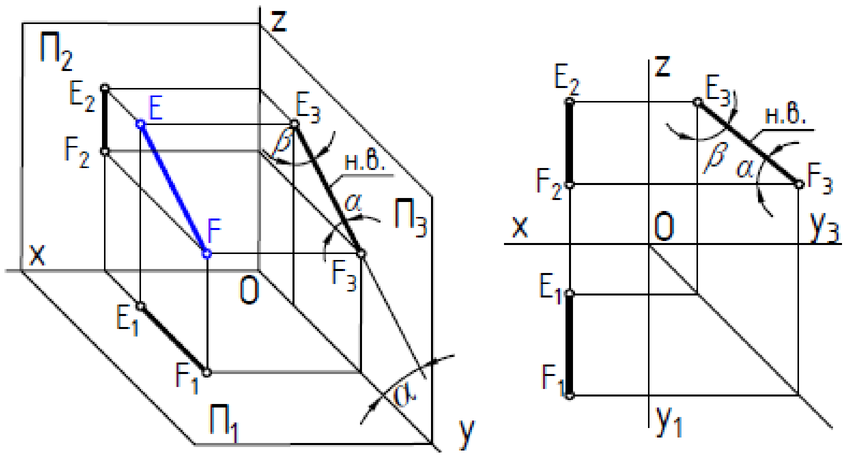


Рис.2.5

<u>Зауваження.</u>

1. Дві проекції повністю задають пряму в просторі.

2. Фронталь і горизонталь часто використовують при рішенні задач. Тому вони мають спеціальне позначення: горизонталь завжди позначають літерою h, а фронталь літерою f (рис.2.6).

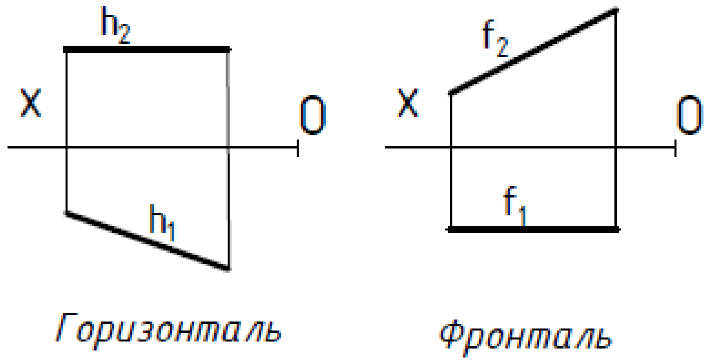


Рис.2.6

<u>*Задача 2.1*</u>. Знайти проекцію B_1 точки В, якщо відомо, що точки А і В належать фронталі (рис.2.7,*а*).

Оскільки точки А і В лежать на фронталі, то A_2 і B_2 лежать на f_2. Проводимо відрізок A_2B_2; оскільки шукана пряма – фронталь, то її проекція f_1 паралельна осі О*x*. Через A_1 проводимо проекцію $f_1 \| Ox$ (рис.2.7,*б*).

З B_2 проводимо вертикальну лінію зв'язку і на перетині її з f_1 отримаємо проекцію B_1 (Рис.7,*в*).

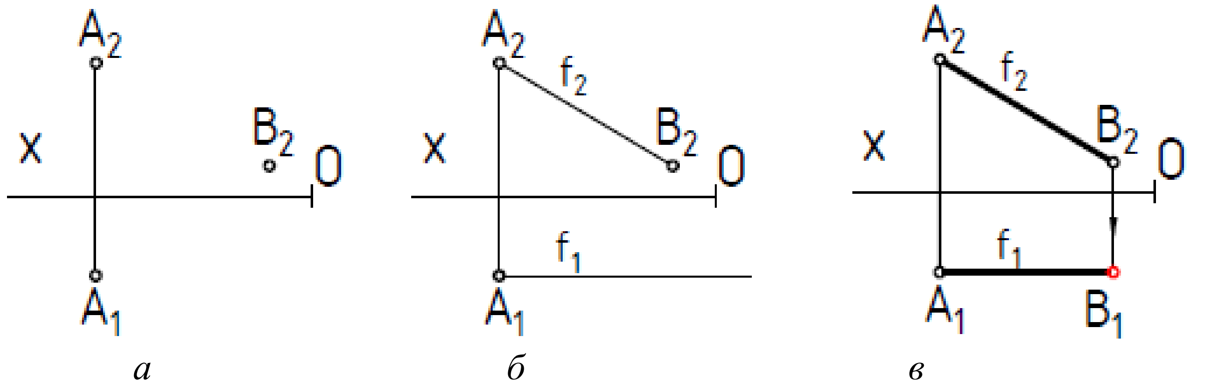


Рис.2.7

Пряма, перпендикулярна до будь-якої площини проекцій, називається *проекцюючою прямою*. При цьому вона паралельна до двох інших площин (на відміну від площини рівня, яка паралельна до однієї площини).

Така пряма на площину, до якої вона перпендикулярна, проекцюється в точку, а на інші дві площини – в прямі (задаються відрізками однакової довжини), паралельні до осей (рис.2.8 – 2.10). На паралельні площини вона проецюється в натуральну величину.

Існує три види проекцюючих прямих:

а. *горизонтально-проекцююча* (рис.2.8, рис.2.11): $a \perp \Pi_1$;

б. *фронтально-проекцююча* (рис.2.9, рис. 2.11): $c \perp \Pi_2$;

в. *профільно-проекцююча* (рис.2.10, рис.2.11): $l \perp \Pi_3$.

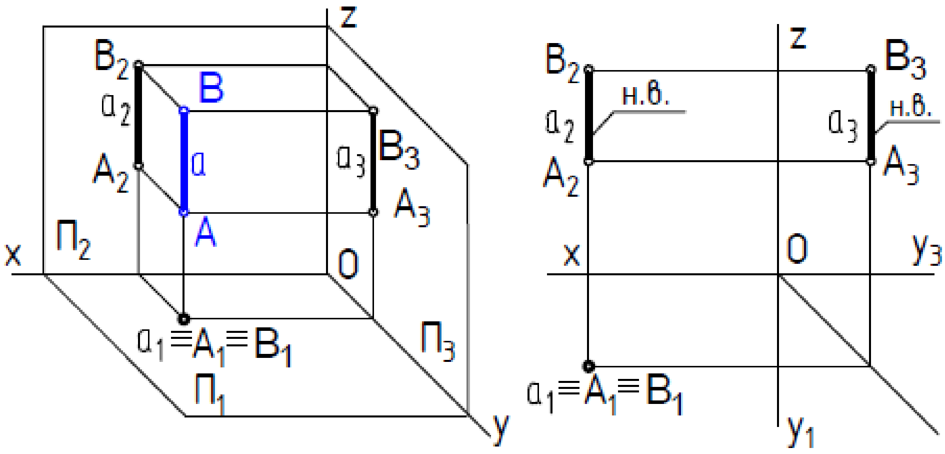


Рис.2.8 Горизонтально-проекцююча пряма

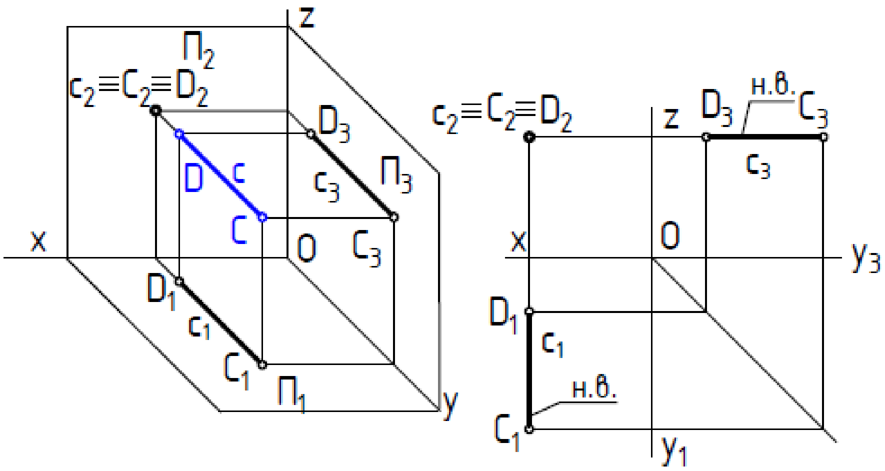


Рис.2.9 Фронтально-проекцююча пряма

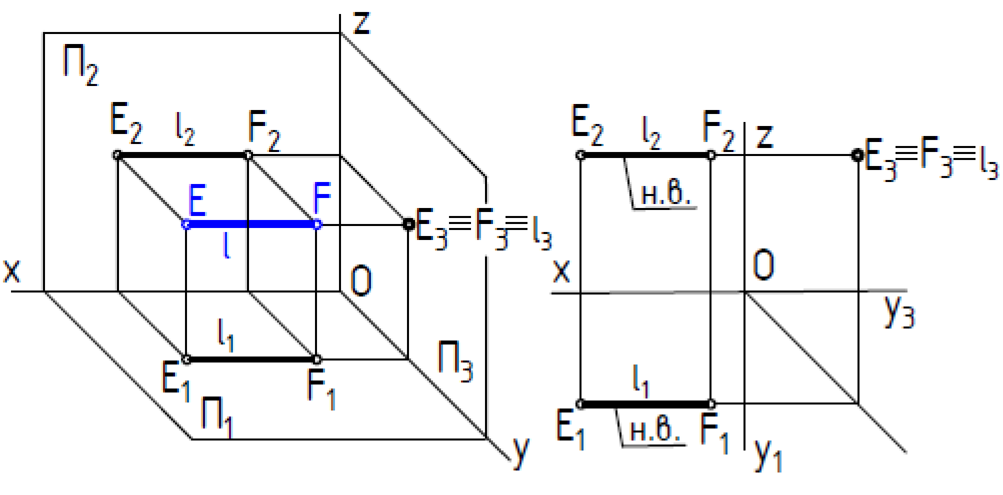


Рис.2.10 Профільно-проекцююча пряма

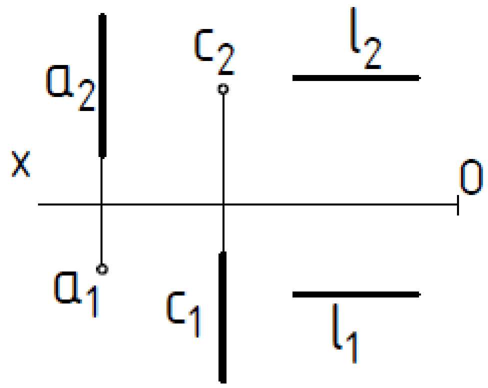


Рис.2.11

Якщо пряма не паралельна і не перпендикулярна жодній з площин проекцій, то така пряма називається *прямою загального положення*. Прямі на рис.2.1 і рис.2.2 є прямими загального положення. Кути, що утворює пряма з площинами проекцій, позначають літерами грецького алфавіту α (з площиною $П_1$), β (з площиною $П_2$), γ (з площиною $П_3$).

На епюрі проекції прямої загального положення складають з осями проекцій довільні кути, величина кожної проекції менше істинної величини самої прямої.

2.4. Взаємне положення точок та прямої

Точка *належить прямій*, якщо її проекції лежать на однойменних проекціях прямої.

На рис.2.12 точки A і D лежать на прямій l, а точки B, C і E не лежать:

$B \notin l$, тому що $B_1 \notin l_1$,

$E \notin l$, тому що $E_2 \notin l_2$,

$C \notin l$, тому що $C_2 \in l_1$, а $C_1 \in l_2$.

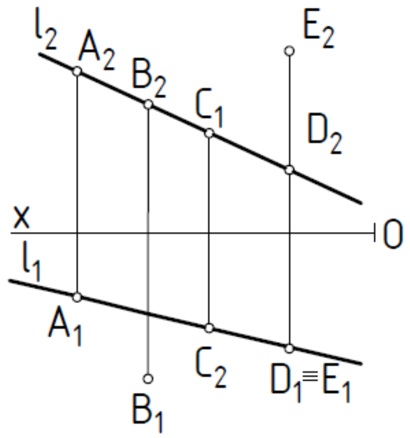


Рис.2.12

На рис.2.12 проекції E_2 і D_2 лежать на одній лінії зв'язку, а E_1 і D_1 співпадають. Такі точки називаються *конкуруючими.* Можна визначити їх взаємне розташування. Оскільки координата z точки E більша ніж у точки D, то точка E розташована над точкою D (координата *z* визначає висоту розташування, а, отже, положення «над» чи «під»). Крім того, E знаходиться над прямою *l*. Аналогічно, порівнявши координати *y* для точки B і прямої *l*, можна зробити висновок, що точка B знаходиться перед прямою (координата *y* визначає відстань між спостерігачем та об'єктом, а, отже, положення «перед» чи «за»).

2.5. Взаємне положення двох прямих

Дві прямі в просторі можуть бути паралельними, можуть перетинатись або бути мимобіжними. Розглянемо їх зображення на епюрі.

1. Якщо дві прямі паралельні, то їх відповідні проекції паралельні (рис.2.13).

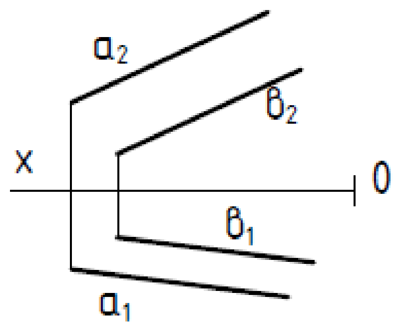


Рис.2.13

2. Якщо дві прямі перетинаються, то їх відповідні проекції теж перетинаються, при чому точки перетину лежать на одній лінії зв'язку (рис.2.14).

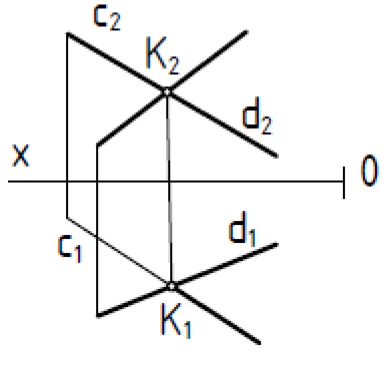


Рис.2.14

3. Якщо прямі мимобіжні, то їх відповідні проекції перетинаються, але при цьому точки перетину не лежать на одній лінії зв'язку (рис.2.15).

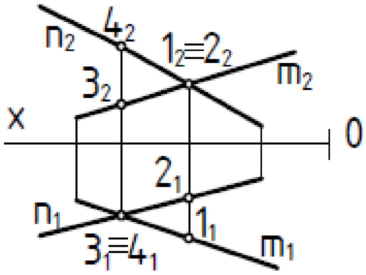


Рис.2.15

Точки 1 і 2 (3 і 4) є конкуруючими. За їх допомогою можна визначити видимість прямих. Видимою буде та пряма, конкуруюча точка якої має більшу координату. На рис. 2.6 на $П_1$ видимою буде пряма *n*, а на $П_2$ – пряма *m*.

2.6 Натуральна величина відрізка прямої загального положення

Як було зазначено раніше, якщо пряма займає в просторі окреме положення, то на одну з площин проекцій відрізки, що знаходяться на ній, проекціюються в натуральну величину (скорочено н.в.).

Якщо пряма займає по відношенню до площин проекцій загальне положення, то для того, щоб визначити її натуральну величину і кути нахилу до площин проекцій, необхідно виконати де-які перетворення.

Було б доцільним змінити положення однієї з площин проекцій таким чином, щоб на неї пряма спроекціювалась у натуральну величину. Такий метод називається «*Перетворення площин проекцій*».

Він полягає в наступному. Розглянемо систему площин $П_2/П_1$ (рис.2.16).

Розташуємо нову площину $П_4 \perp П_1$ і таким чином, що $AB \parallel П_4$. В результаті перетину $П_4$ з $П_1$ утвориться нова вісь проекцій x_1.

Відносно $П_4$ пряма AB є прямою рівня, тому проекція $A_1B_1 \parallel x_1$, A_4B_4 – натуральна величина відрізка AB. Крім того, на $П_4$ проецюється в натуральну величину кут α нахилу прямої AB до площини $П_1$.

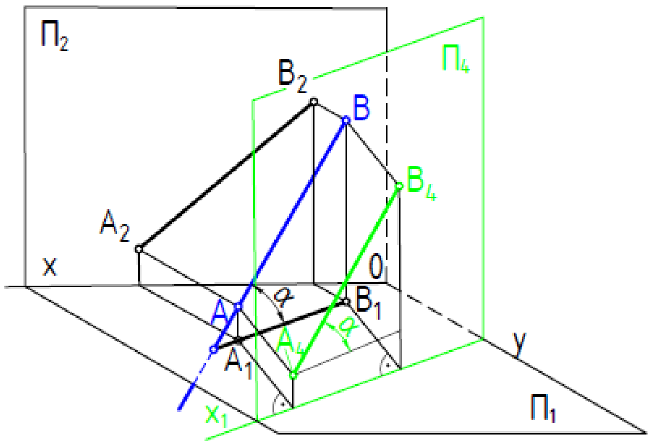
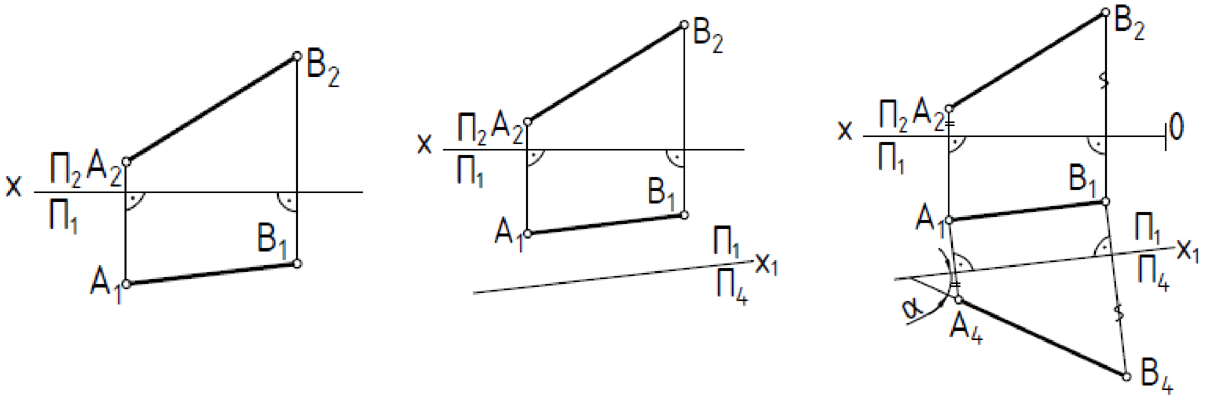


Рис.2.16

На рис. 2.17 –2.18 показано, як подібна побудова виконується на епюрі.

Нехай необхідно визначити натуральну величину відрізка АВ, що належить прямій загального положення, та визначити кути нахилу до площин проекцій (рис. 2.17, *а*).



а *б* *в*

Рис.2.17

Виконуємо перетворення системи площин $\frac{П_2}{П_1}$ в $\frac{П_1}{П_4}$.

Для цього, на площині $П_1$ проводимо вісь x_1 || A_1B_1 (рис. 2.17,*б*). Далі будуємо лінії зв'язку для проекцій A_1 та B_1 відносно осі x_1 і відкладаємо на них координати z проекцій A_2 та B_2; довжина відрізка A_4B_4 є н.в. відрізка АВ. Кут, що утворився при перетині A_4B_4 з x_1 – шуканий кут α (рис. 2.17,*в*).

Щоб знайти кут β, треба виконати перетворення системи площин $\frac{П_1}{П_2}$ в $\frac{П_2}{П_5}$ і провести аналогічні побудови відносно осі x_2, але цього разу вздовж ліній зв'язку необхідно відкласти відповідні координати y (рис. 2.18).

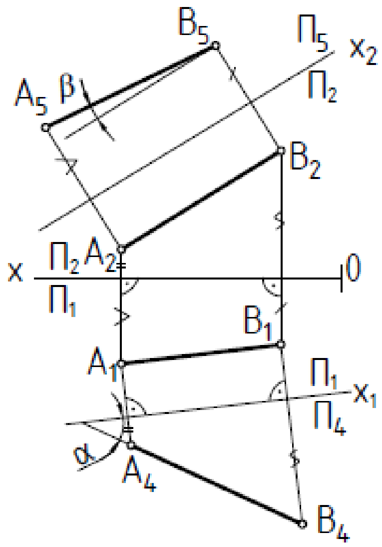
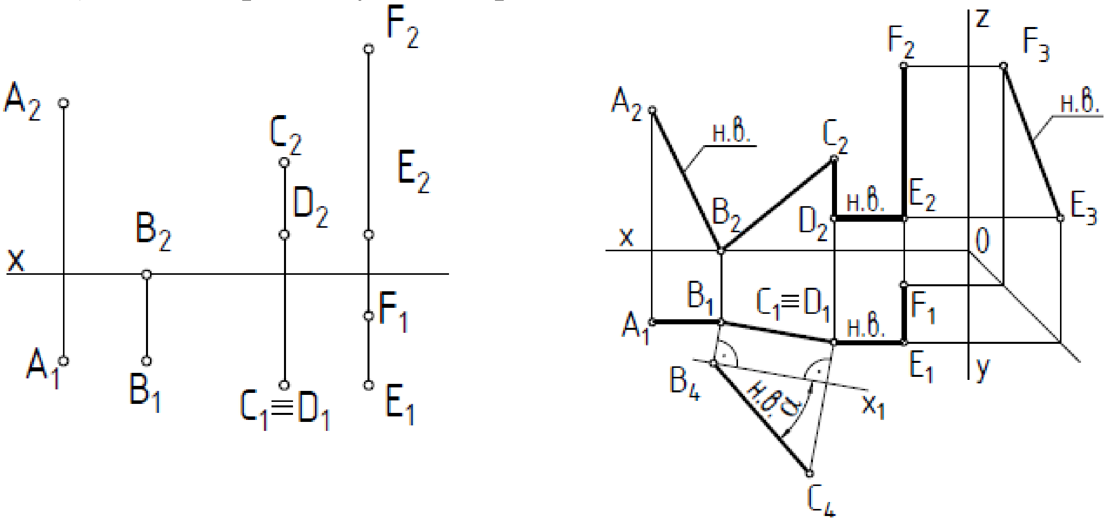


Рис.2.18

Задача 2.2. Побудувати проекції ламаної ABCDEF (рис. 2.19,*а*), визначити:

1) положення кожного відрізка відносно площин проекцій;
2) довжину ламаної;
3) кут α нахилу відрізка ВС до Π_1 ;
4) взаємне розташування прямих АВ та DE.



а *б*

Рис.2.19

Щоб побудувати проекцію ламаної на Π_1, будуємо послідовно відрізки A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 і т.д. Аналогічно, проекція ламаної на Π_2 – це послідовність відрізків A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2E_2 і E_2F_2 (рис.2.19,*б*).

1. Розглянемо положення кожного відрізка і визначимо його натуральну величину.

АВ: $A_1B_1 \parallel 0x$ – АВ – фронталь, A_2B_2 – н.в. прямої АВ;

ВС: проекції не паралельні і не перпендикулярні до осей – ВС – загального положення; щоб визначити натуральну величину відрізка, необхідно виконати перетворення площин. Оскільки далі ми визначатимемо кут нахилу до площини Π_1 , то побудову будемо виконувати на Π_1 (рис.2.17,*в)* B_4C_4 – н.в. прямої ВС;

CD: $C_2D_2 \perp Ox$, а $C_1 \equiv D_1$, то ВС – горизонтально проекціююча пряма, тому C_2D_2 – н.в. прямої CD;

DE: обидві проекції паралельні Ох, отже, DE – профільно проекціююча, і D_2E_2, D_1E_1 – н.в. прямої DE;

EF: дві проекції паралельні до осей Ох та Оу відповідно і мають різні довжини. Отже, EF – профільно проекціююча пряма. Тоді її натуральна величина зображена на Π_3. Цю проекцію треба побудувати. Виконуємо побудову за допомогою сталої кресленика. E_3F_3 – н.в. прямої EF.

Щоб визначити довжину ламаної, треба виміряти довжини проекцій, для яких ми визначили н.в., і додати їх.

Кут нахилу ми вже знайшли, вимірюємо його транспортиром.

Для того, щоб визначити взаємне розташування прямих AB та DE, продовжимо проекції до їх перетину (рис.2.20). На $П_2$ – це точка $К_2$, а на $П_1$ видно, що $A_1B_1 \| D_1E_1$. Висновок: ці прямі мимобіжні.

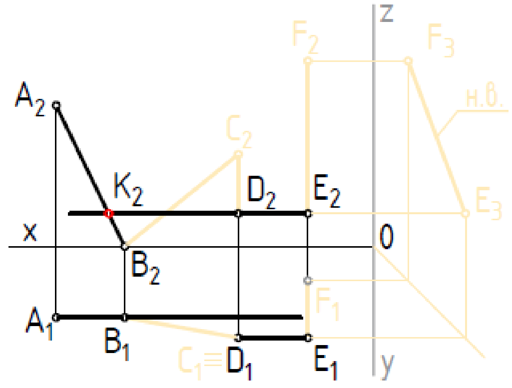


Рис. 2.20

Питання до теми лекції.

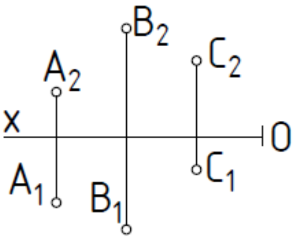
1. Який визначник має пряма?
2. Яка умова належності точки прямій?
3. Як визначити на епюрі, чи є прямі паралельними? мимобіжними? такими, що перетинаються?
4. Яка пряма є прямою окремого положення? загального положення?
5. Що таке фронталь і горизонталь?
6. Як визначити натуральну величину відрізка прямої окремого положення?
7. Як необхідно розташовувати нові площини проекцій, щоб відрізок прямої спроеціювався в натуральну величину?
8. Яка координата залишається незмінною при заміні площин $П_1/П_4$? $П_2/П_5$?

Лекція 3.Проекціювання площини

Поняття, які необхідно засвоїти: *визначник площини, слід площини, площина загального положення, площина окремого положення, площина рівня (горизонтальна, фронтальна, профільна), проекцююча площина (горизонтально-, фронтально-, профільно-), лінія рівня площини, заміна площин проекцій.*

3.1. Комплексний рисунок площини

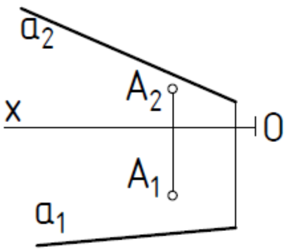
Основним визначником площини є три точки, що не лежать на одній прямій (рис.3.1)



$\Sigma(A;B;C)$

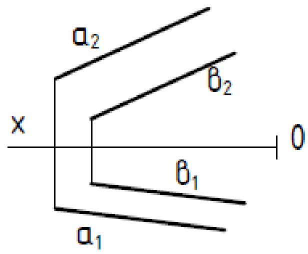
Рис.3.1

Іншими визначниками площини можуть бути: точка і пряма (рис.3.2), дві паралельні прямі (рис3.3), дві прямі що перетинаються (рис3.4), плоска фігура (рис3.5).



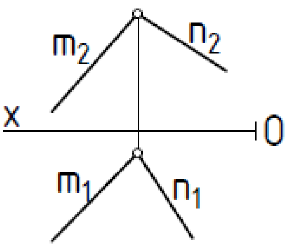
$\Delta(A;a)$

Рис3.2



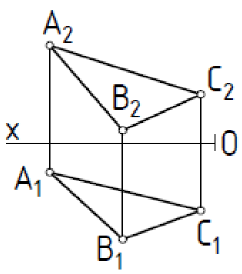
$\Omega(a \parallel b)$

Рис3.3



$\Gamma(m \cap n)$

Рис3.4

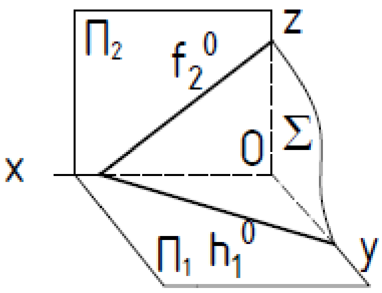


$\Theta(\triangle ABC)$

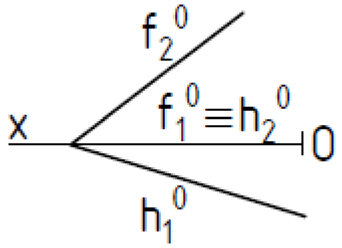
Рис3.5

Площина може бути задана своїми слідами. Слідом площини називається лінія перетину площини з площиною проекцій. На рис.3.6,*а*, проекції f_2^0 та h_1^0 – сліди площини Σ.

Рис.3.6, *б* – епюр площини Σ, заданої своїми слідами: $\Sigma(f_2^0, h_1^0)$.



а



б

Рис.3.6

Прочитати комплексний рисунок площини – це:
– визначити положення площини відносно площин проекцій;
– визначити кути нахилу площини до площин проекції;
– визначити положення площин відносно одна одної;
– визначити положення точок і прямих відносно площини;
– визначити натуральну величину фігури, що належить площині.

3.2. Умови належності точки і прямої площині. Прямі окремого положення в площині

1. Точка належить площині, якщо вона належить прямій, що лежить в цій площині.

2. Пряма належить площині, якщо:

а) вона проходить через дві точки, що належать даній площині

б) вона проходить через точку, що належить даній площині, і паралельна до прямої, що належить даній площині.

Задача 3.1. Точка К належить площині Σ, що задана трикутником АВС: $K \in \Sigma(\triangle ABC)$. Побудувати проекцію K_1 точки К (рис.3.7).

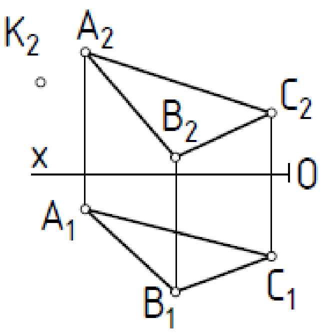


Рис.3.7

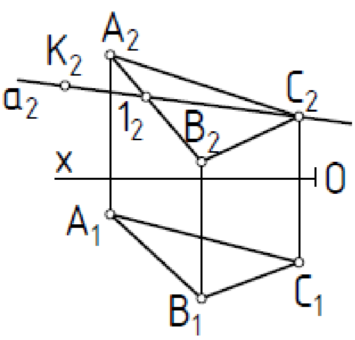


Рис.3.8

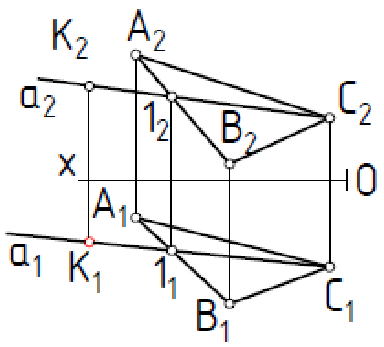


Рис.3.9

Рішення. Через точку К проведемо довільну пряму *а*, яка теж лежить в площині Σ, і перетне $\triangle ABC$ в двох точках. Нехай це будуть точки С і 1.

Для цього на площині $П_2$ проводимо проекцію a_2 прямої a (рис.3.8). Проекція $К_1$ точки К буде належати проекції a_1. Побудуємо її. Для цього проводимо лінії зв'язку, знаходимо проекцію $1_1 \in А_1В_1$, проводимо проекцію a_1. З проекції $К_2$ опускаємо лінію зв'язку і на перетині її з a_1 будуємо проекцію $К_1$ точки К (рис.3.9).

<u>*Задача 3.2.*</u> Площина задана двома паралельними прямими: $\Delta(a \parallel в)$. Чи належать точки К і N площині Δ (рис.3.10)?

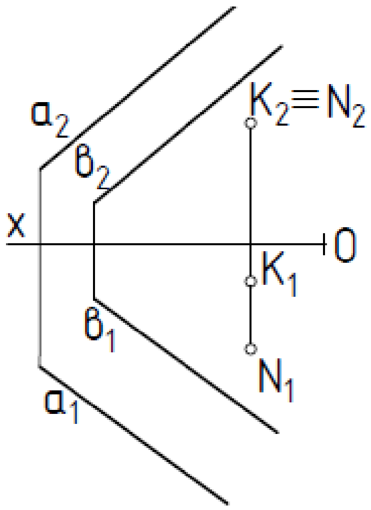


Рис.3.10

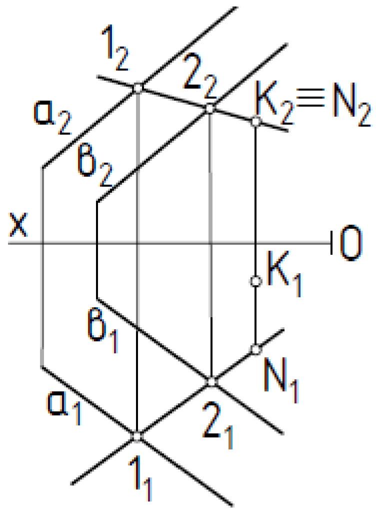


Рис.3.11

<u>*Рішення.*</u> Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій, що належить даній площині. Перевіримо це твердження для точок К і N.

Нехай точки К і N лежать на прямій $12 \subset \Delta$ (рис.3.11). Тоді має виконуватись умова:

$К_1 \in 1_12_1$, $К_2 \in 1_22_2$;

$N_1 \in 1_12_1$, $N_2 \in 1_22_2$.

Але з Рис.7 видно, що $К_1 \notin 1_12_1$. Отже, точка К $\notin$ 12, і тому К $\notin \Delta(a \parallel в)$.

Особливе місце в вивченні теми «Площина» займають прямі окремого положення, а саме, прямі рівня.

<u>*Задача 3.3.*</u> В площині $\Sigma(\Delta ABC)$ побудувати довільну горизонталь.

<u>*Рішення.*</u> Як відомо, проекція h_2 горизонталі паралельна осі $0x$. Саме з цієї проекції починаємо будувати горизонталь.

В площині можна провести безліч горизонталей. Проведемо таку, що перетинає сторони трикутника. Можливі два варіанти.

Проекцію h_2 проводимо так, що вона перетинає трикутник в двох нових точках 1_2 та 2_2 (рис.3.12*а*), або так, що вона проходить через уже існуючу точку $С_2$ та нову точку 1_2 (рис.3.12*б*).

а б

Рис.3.12

В обох випадках, $h_2 \parallel 0x$. Далі будуємо проекцію h_1 .

Слід зауважити, що на рис.3.12а і рис.3.12б побудовані різні горизонталі. Крім того, варіант (*б*) є більш раціональним, оскільки в цьому випадку виконано менше побудов.

3.3. Положення площини відносно площин проекцій

Розташування площини відносно площин проекцій визначається в залежності від її кутів нахилу до цих площин.

– Площина, що не паралельна і не перпендикулярна жодній з площин проекцій, є *площиною загального положення*.

– Площина, що перпендикулярна одній з площин проекцій, є *площиною окремого положення*, яка, в свою чергу, може бути:

а) *площиною рівня* – площина, що паралельна до однієї з площин проекцій (при цьому, вона завжди перпендикулярна до двох інших);

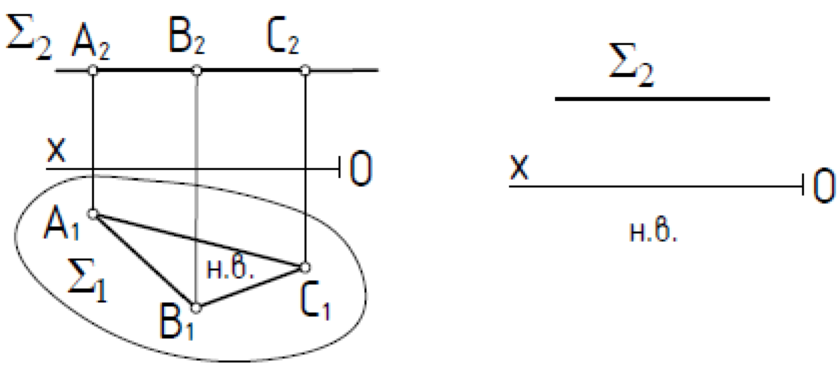
б) *проекцюючою площиною* – площина, що перпендикулярна до однієї з площин проекцій, при цьому інші кути не є прямими.

Площина рівня:

1. ***Горизонтальна площина рівня***: площина, що паралельна $П_1$ ($\alpha = 0°$, $\beta = \gamma = 90°$).

$\Sigma(\Delta ABC) \parallel П_1$: площина задана ΔABC (рис.3.13*а*).

$\Sigma(\Sigma_2) \parallel П_1$: площина задана слідом-проекцією Σ_2 (рис.3.13*б*).



$\Sigma(\Delta ABC)$ $\Sigma(\Sigma_2)$

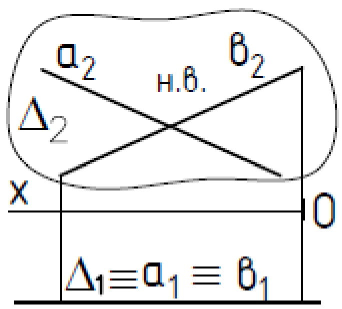
а *б*

Рис.3.13

2. ***Фронтальна площина рівня:*** площина, що паралельна $П_2$ ($\beta = 0°$, $\alpha = \gamma = 90°$).

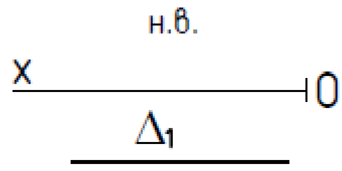
$\Delta(a \cap в) \parallel П_2$: площина Δ задана двома прямими, що перетинаються (рис.3.14*а*);

$\Delta\ (\Delta_1) \parallel П_2$: площина Δ задана слідом-проекцією Δ_1 (рис.3.14*б*).



$\Delta(a \cap в)$

а



$\Delta\ (\Delta_1)$

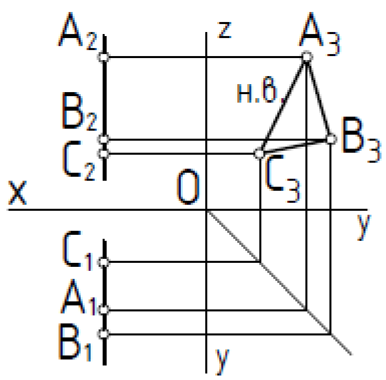
б

Рис.3.14

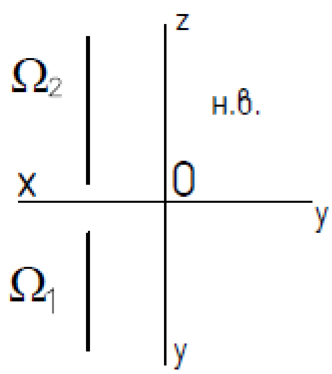
3. ***Профільна площина рівня:*** площина, що паралельна $П_3$ ($\gamma = 0°$, $\alpha = \beta = 90°$).

$\Omega(\triangle ABC) \parallel П_3$: площина задана $\triangle ABC$ (рис.3.15*а*);

$\Omega(\Omega_1, \Omega_2) \parallel П_3$: площина задана слідами проекцій (рис.3.15*б*).



а



б

Рис.3.15

<u>*Зауваження*</u>:

— Всі точки, прямі і фігури, що розташовані в площині рівня, проекцюються на її слід-проекцію;

— Всі прямі і фігури, що розташовані в площині рівня, проекцюються на паралельну площину проекцій в натуральну величину.

Проекцююча площина.

1. ***Горизонтально-проекцююча площина:*** площина, що перпендикулярна до $П_1$ ($\alpha = 90°$, $0 < \beta, \gamma < 90°$).

$\Sigma(a \cap в) \perp П_1$ (рис.3.16).

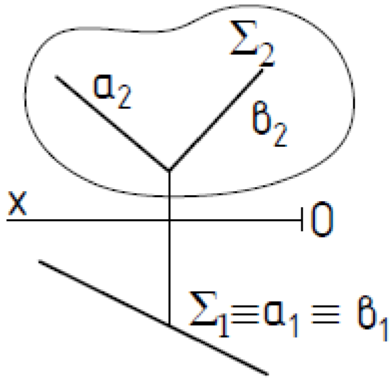


Рис.3.16

2. ***Фронтально-проекцююча площина:*** площина, що перпендикулярна до $П_2$ ($\beta = 90°$, $0 < \alpha, \gamma < 90°$).

Δ (Δ_2) $\perp П_2$ (рис.3.17).

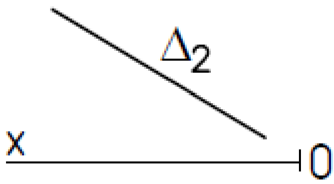


Рис.3.17

3. ***Профільно-проекцююча площина:*** площина, що перпендикулярна до $П_3$ ($\gamma = 90°$, $0 < \alpha,\beta < 90°$).

$\Theta(\Delta ABC) \perp П_3$ (рис.3.18).

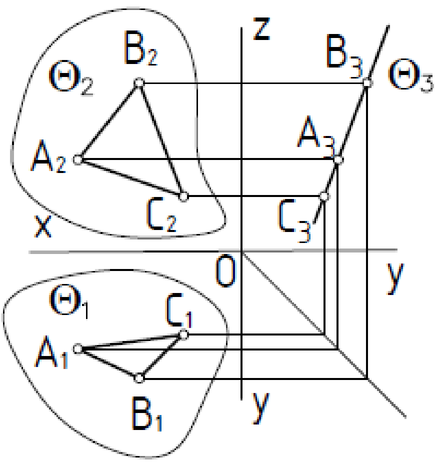


Рис.3.18

Зауваження:

Всі точки, прямі і фігури, що розташовані в проекціюючій площині, проекціюються на її слід-проекцію.

3.4. Взаємне положення площин

Вирізняють три взаємних положення площин:

— Площини збігаються (співпадають).
— Площини паралельні.
— Площини перетинаються.

Розглянемо умови паралельності площин.

Дві площини ***паралельні****, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини, паралельні двом прямим, що перетинаються, другої площини* (рис.3.19).

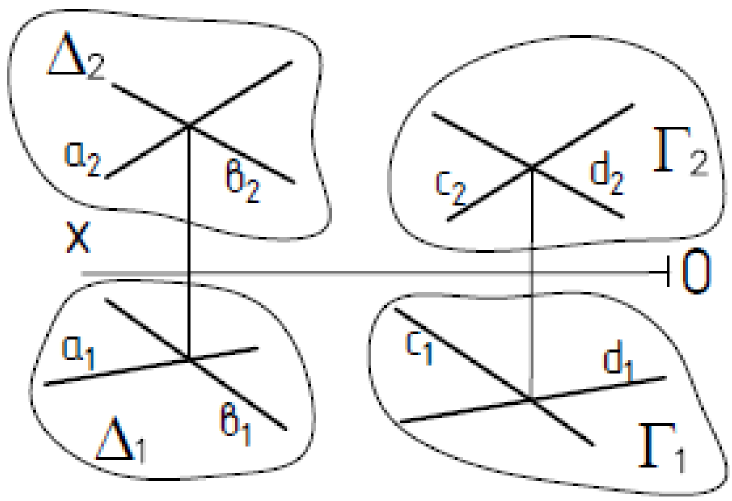


Рис.3.19

Якщо площини задані своїми слідами (площини окремого положення, наприклад), то ознакою їх паралельності є паралельність їх однойменних слідів проекцій (рис.3.20).

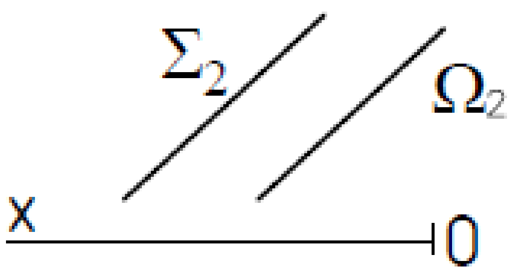


Рис.3.20

3.5. Перетворення площини загального положення в площину рівня

Як було зазначено вище, якщо площина займає загальне положення або є проекцюючою площиною, то визначити натуральну величину фігур, які вона містить, не є можливим. Для рішення цієї задачі необхідно перетворити дану площину в площину рівня, використавши метод перетворення площин проекцій.

<u>*Задача 3.4.*</u> Визначити периметр $\triangle ABC$ (рис.3.21).

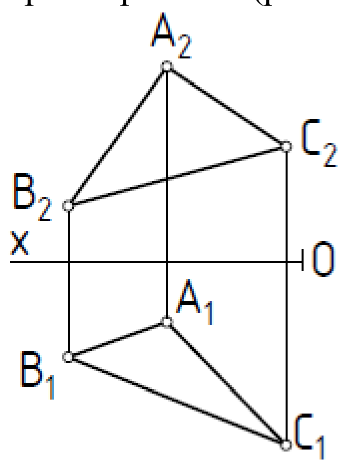


Рис.3.21

<u>*Рішення.*</u> Нехай задана площина $\Sigma(\triangle ABC)$. Визначити натуральну величину сторін трикутника можливо, якщо він належить площині рівня. Щоб перетворити площину загального положення в площину рівня, необхідно послідовно виконати дві заміни площин проекцій.

<u>1-а Заміна.</u> Перетворимо площину Σ в проекцюючу площину. Для цього проведемо в ній довільну горизонталь h (див. задача 3.3) або фронталь f. Далі переходимо до нової системи площин Π_1/Π_4. Для цього проводимо нову вісь $x_1 \perp h_1$ і будуємо відносно неї проекції вершин трикутника – точки A_4, B_4, C_4 , відклавши відповідні координати z з площини Π_2, від осі x_1 (рис.3.22).

З рис.3.22 видно, що площина Σ зайняла відносно нової площини Π_4 проекцююче положення: проекції A_4, B_4, C_4 належать сліду-проекції Σ_4. Зауважимо, що на площині Π_4 можемо визначити кут нахилу α.

<u>2-а Заміна.</u> Оскільки площина Σ зайняла проекцююче положення, стало можливим перевести її в площину рівня. Для цього вводимо нову площину Π_5, яка перпендикулярна до Π_4 та паралельна до площини Σ. Щоб побудувати її на епюрі, проводимо нову вісь $x_2 \parallel \Sigma_4$ (рис.3.23).

В новій системі площин будуємо проекції вершин A_5, B_5, C_5 трикутника, відклавши відповідні координати y з площини Π_1.

Проекція трикутника $A_5B_5C_5$ – натуральна величина $\triangle ABC$. Вимірявши його сторони, знаходимо периметр.

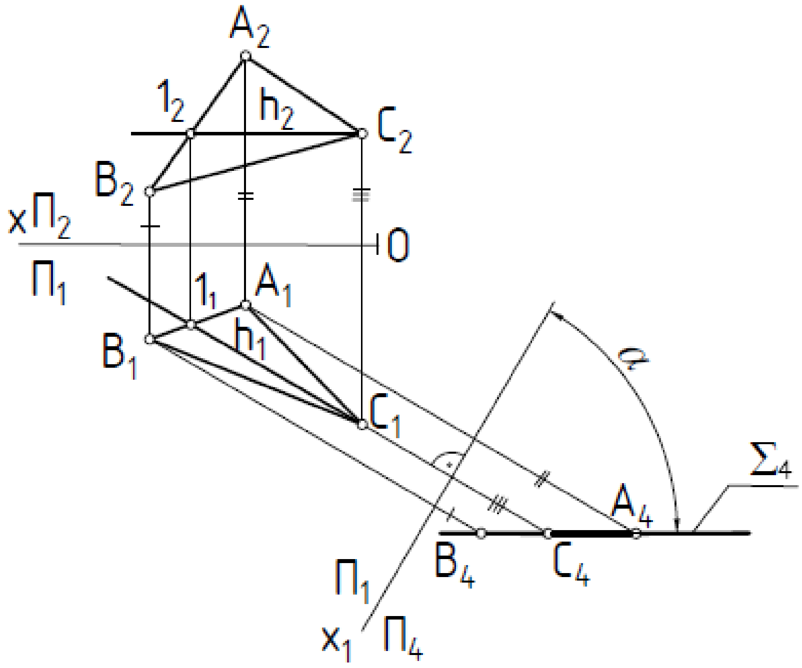


Рис.3.22

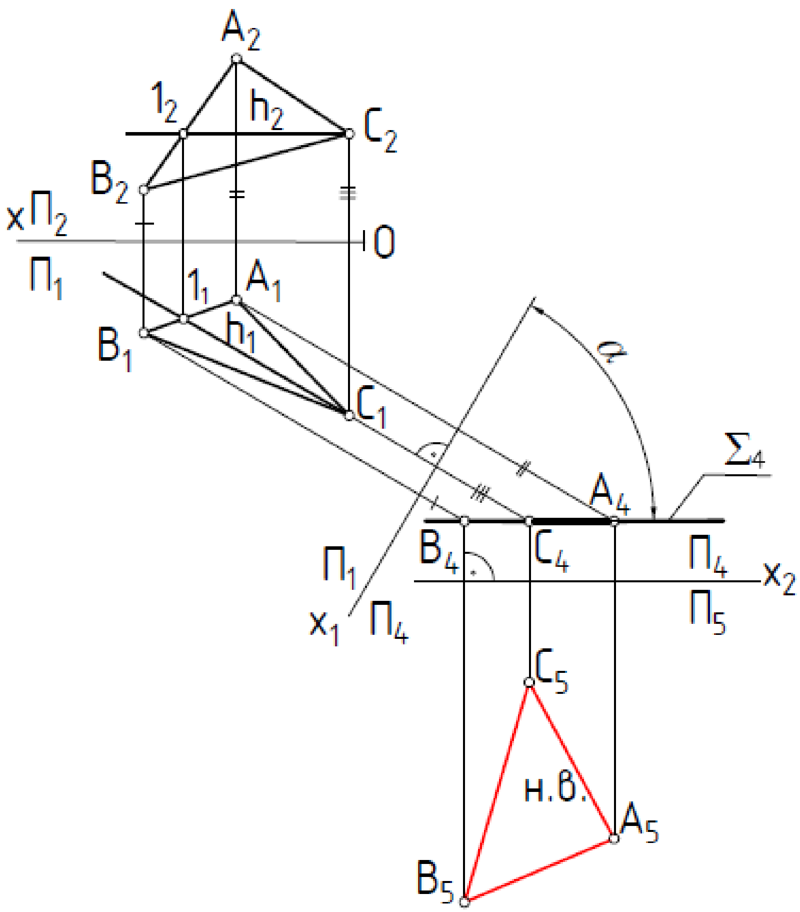


Рис.3.23

Задача має аналогічне рішення, якщо виконати побудову відносно фронталі (рис.3.24). В цьому випадку можна визначити кут нахилу β.

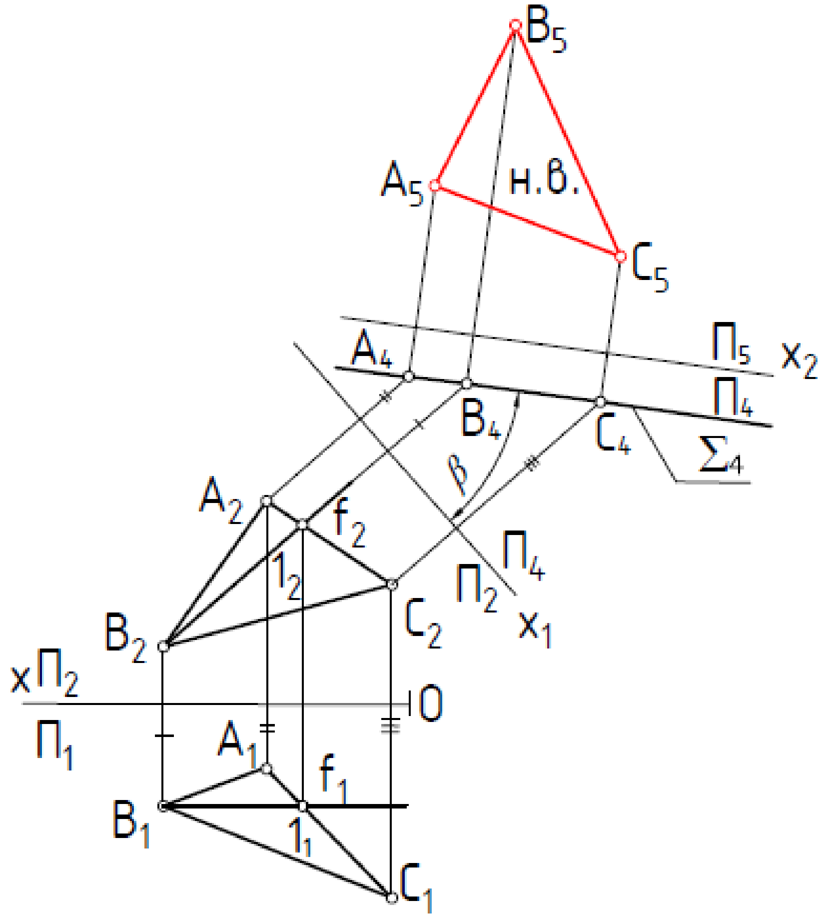


Рис.3.24

Питання до теми лекції.

1. Що є визначником площини? Наведіть приклади.
2. Які основні умови належності точки і прямої площині**?**
3. Яка площина є площиною загального положення**?** Площиною рівня? Проекцюючою площиною?
4. Для чого використовують метод заміни площин проекцій?

Лекція 4. Моделювання поверхні

Поняття, які необхідно засвоїти: *кінематичний спосіб, твірна поверхні, напрямна поверхні, поверхня обертання, лінійчата поверхня, розгортна поверхня, нерозгортна поверхня.*

4.1 Поверхні та способи їх задання

Більшість деталей машинобудування складаються з регулярних або близьких до них поверхонь , що мають форму циліндрів, конусів, сфер, паралелепіпедів. Ці поверхні обробляють по зовнішнім або внутрішнім поверхням в основному на металорізальних, токарних, фрезерних і шліфувальних верстатах. Однак в промисловості існують деталі, що мають досить складні криві поверхні: деталі фюзеляжу літака, ходової частини автомобіля, лопаті турбін і ін. Крім машинобудівних виробів складні криві поверхні мають інженерні споруди (будівлі, мости, тунелі тощо). Моделювання таких поверхонь є найскладнішим в нарисній геометрії.

Поверхня вважається заданою на кресленику, якщо щодо будь-якої точки, зазначеної на цьому кресленику, можна однозначно вирішити, належить вона даній поверхні чи ні.

Способи задання поверхонь:

Аналітичний. Поверхня розглядається як геометричне місце точок, координати яких задовольняють деякому заданому рівнянню виду

$$F(x, y, z) = 0.$$

Каркасний. Будь-яку поверхню можна задати досить щільною мережею ліній і точок, що належать цим поверхням. Сукупність таких ліній називається каркасом поверхні (рис.4.1).

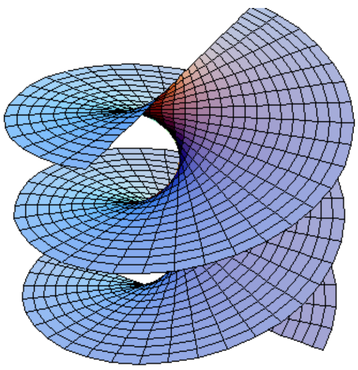


Рис.4.1 Гелікоїд [2]
https://uk.wikipedia.org/wiki/Гелікоїд

Таке задання може бути повним, коли лініями каркаса можна визначити кожну точку поверхні, або неповним, якщо визначити можна тільки точки, що лежать на лініях каркаса. При цьому точки, що лежать між лініями каркаса, визначаються наближено.

Одним з найбільш поширених в промисловості методів конструювання поверхонь є метод конструювання за допомогою безперервного каркаса. Метод каркасного конструювання використовується при виготовленні кузовів автомобілів, літаків, в суднобудуванні, для виконання штампів при виготовленні поверхонь з листового матеріалу, в топографії та ін. (рис.4.2)

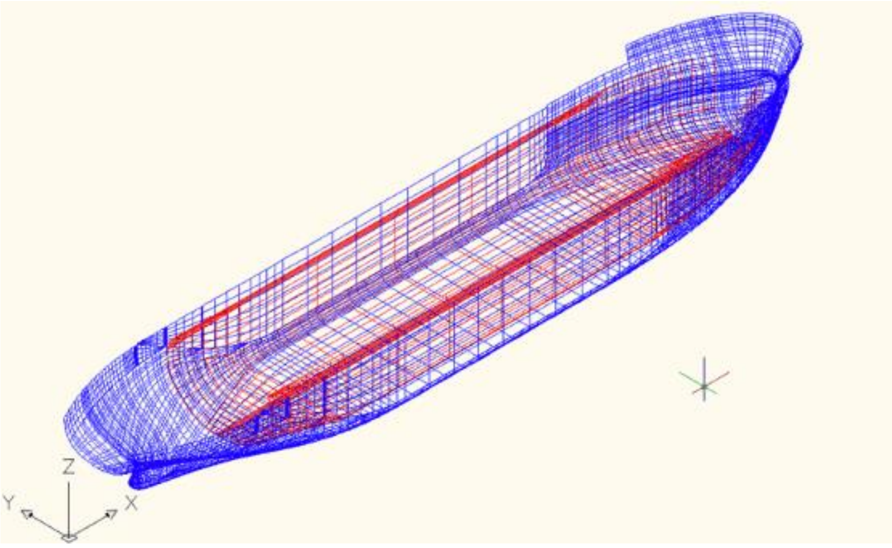


Рис.4.2 Каркасна модель поверхні корпусу судна [3]
http://esg.spb.ru/articles/106/

Кінематичний. Кінематичну поверхню можна розглядати як безперервну сукупність послідовних положень лінії, що переміщується в просторі вздовж деяких нерухомих ліній. Таким чином, на будь-який кінематичної поверхні можна виділити два сімейства ліній: сімейство твірних і сімейство напрямних.

Напрямні і твірні мають наступну властивість: ніякі дві лінії одного сімейства не перетинаються між собою, але кожна лінія одного сімейства перетинає всі лінії іншого.

В нарисній геометрії розглядаються поверхні, задані кінематичним способом.

Визначник кінематичної поверхні складається з:

- твірної;
- напрямних (задають геометричну форму);
- алгоритму зміни положення та форми твірної під час руху.

Класифікація поверхонь

1) За способом задання:
- аналітичні;
- кінематичні;
- поверхні довільних форм.

2) Згідно із законом руху твірної:
- з поступальним рухом твірної;
- з обертовим рухом твірної;

- з гвинтовим рухом твірної.

3) За видом твірної:

- поверхні з прямолінійною твірною або лінійчаті поверхні;
- поверхні з криволінійною твірною.

4) Згідно із законом зміни форми твірної:

- поверхні з твірною постійного виду;
- поверхні з твірною змінного виду.

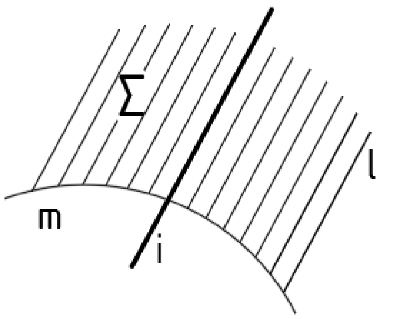
5) За ознакою розгортання:

- розгортні поверхні - можна поєднати з площиною без розривів і складок. Сюди відносяться поверхні всіх багатогранників, циліндричні, конічні, торсові.
- нерозгортні - не можна поєднати з площиною без розривів і складок. Сюди відносяться всі інші поверхні.

Найбільшого поширення в техніці отримали поверхні обертання, лінійчаті та гвинтові.

Лінійчаті поверхні. Лінійчатою називається поверхня, утворена рухом прямої лінії.

Розгортні лінійчаті поверхні: циліндрична (рис.4.3), конічна (рис.4.4), торсична, або поверхня дотичних (рис.4.5). Тут і далі геометрична частина визначника – в круглих дужках, алгоритмічна частина – в квадратних.

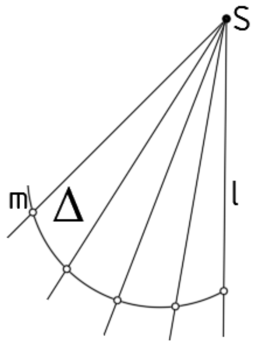


$\Sigma(l,m)$, $[l \parallel i,\ l \cap m]$

l - твірна

m – напрямна

Рис.4.3

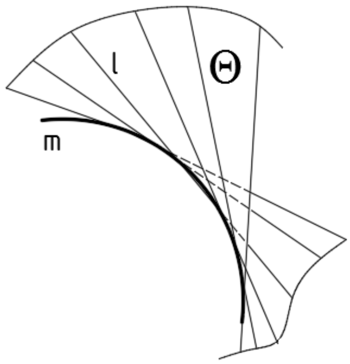


$\Delta(m,S)$, $[l \cap m,\ l \subset S]$

l - твірна

m – напрямна

Рис.4.4



$$\Theta(m),\ [l \curlyvee m].$$

l - твірна

m – напрямна

Рис.4.5

Поверхні обертання. Поверхнею обертання називають поверхню, утворену обертанням твірної l навколо нерухомої прямої i – осі обертання (рис.4.6).

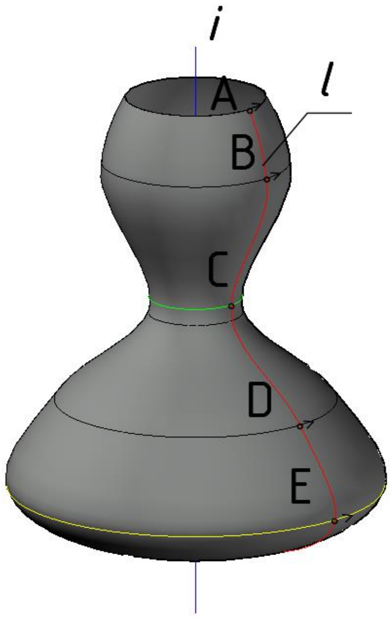


Рис.4.6

Визначник поверхні обертання:

$$\Sigma(l, i);\ [l \cup i]$$

При обертанні навколо осі кожна точка твірної описує коло, яке називається паралеллю поверхні обертання (точки A, B, D на рис. 4.6). Площина, на якій знаходиться паралель, завжди перпендикулярна до осі обертання. Найдовшу паралель називають екватором поверхні, найкоротшу – горловиною або полюсом, якщо її радіус дорівнює 0. На рис.4.6 точка A при обертанні навколо осі i рухається по горловині, а точка E – по екватору.

Лінії, одержувані при перетині поверхні обертання площинами, що проходять через вісь, називають меридіанами поверхні. Меридіан, розташований у фронтальній площині Π_2, називається головним меридіаном або обрисом поверхні (рис 4.7).

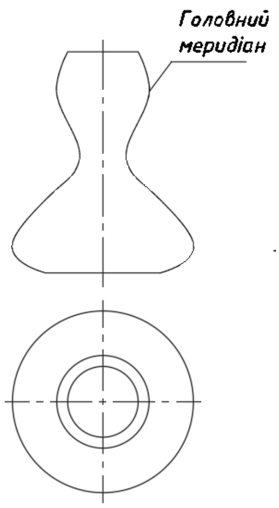


Рис. 4.7

Вирізняють поверхні обертання з прямолінійною твірною (циліндрична, конічна поверхні обертання) і криволінійною твірною (сфера, еліпсоїд, параболоїд та гіперболоїд обертання).

4.2 Побудова проекцій точок на поверхнях

Одним із основних умінь, яке має сформуватися в процесі вивчення нарисної геометрії – це вміння «читати» зображення поверхні, а саме вміння за зображенням визначати вид поверхні та її розташування в просторі по відношенню до спостерігача або до інших поверхонь. Побудова проекцій точок на видах поверхонь сприяє формуванню цього вміння.

На рисунках 4.8 – 4.12 наведено приклади знаходження проекцій точок для основних поверхонь.

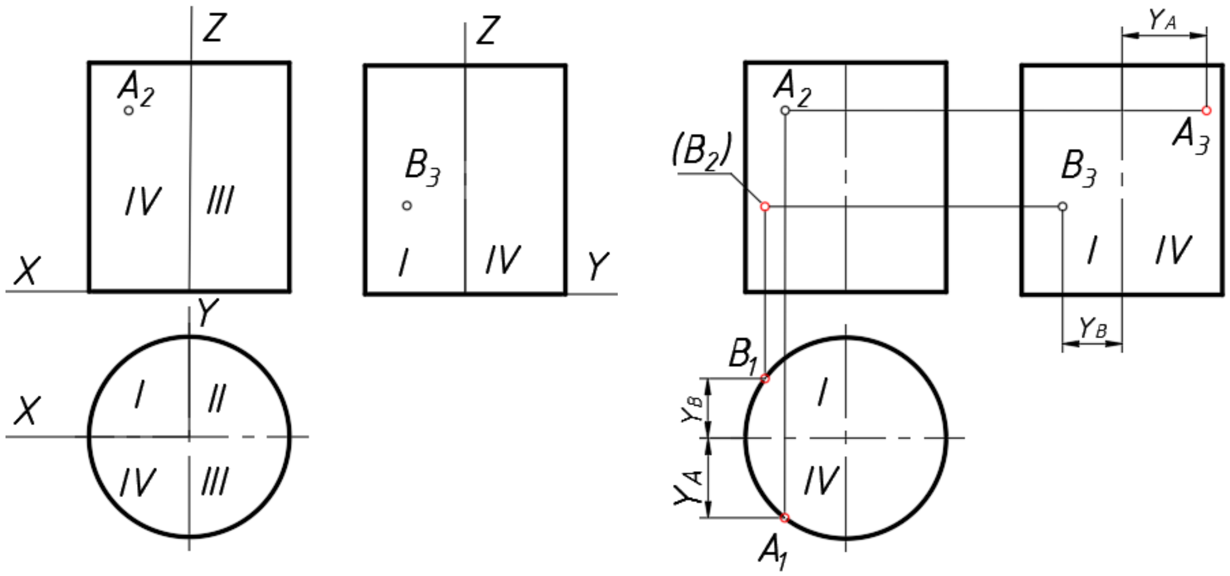
Якщо поверхня є поверхнею обертання, то положення точки на ній визначається за допомогою кола, що проходить через цю точку на поверхні (точки A, B і C на рис.4.10 і точки D і E на рис.4.11). Це не виключає можливості використання прямолінійної твірної у випадку, коли поверхня обертання є лінійчатою поверхнею. Приклад – побудова проекцій точки B на конічній поверхні (рис.4.10,*в* і 4.10,*г*).

Якщо поверхня є лінійчатою поверхнею, то для побудови проекцій точки можна використати два способи.

1. *Побудова за допомогою допоміжної площини рівня.* Через задану проекцію необхідно провести допоміжну площину рівня. Ця площина перетне поверхню по замкненій ламаній. У випадку прямої піраміди, наприклад, ця ламана матиме форму *n*-кутника (на рис.4.12, точки D і E лежать на шестикутнику).

2. *Побудова за допомогою прямолінійної твірної.* Приклад такої побудови наведено на рис.4.12,*в*, точка D. Слід зауважити, що для побудови проекцій точки E також можна було використати цей спосіб, але при заданому розташуванні більш раціонально відкласти координату Y_E , взявши її з площини $П_3$, на площині $П_1$.

Циліндр обертання.



а *б*

Рис.4.8

Призма

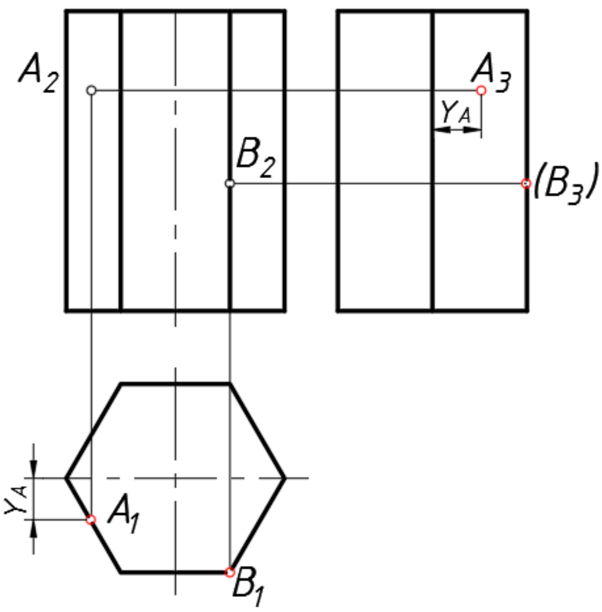


Рис.4.9

Конус обертання

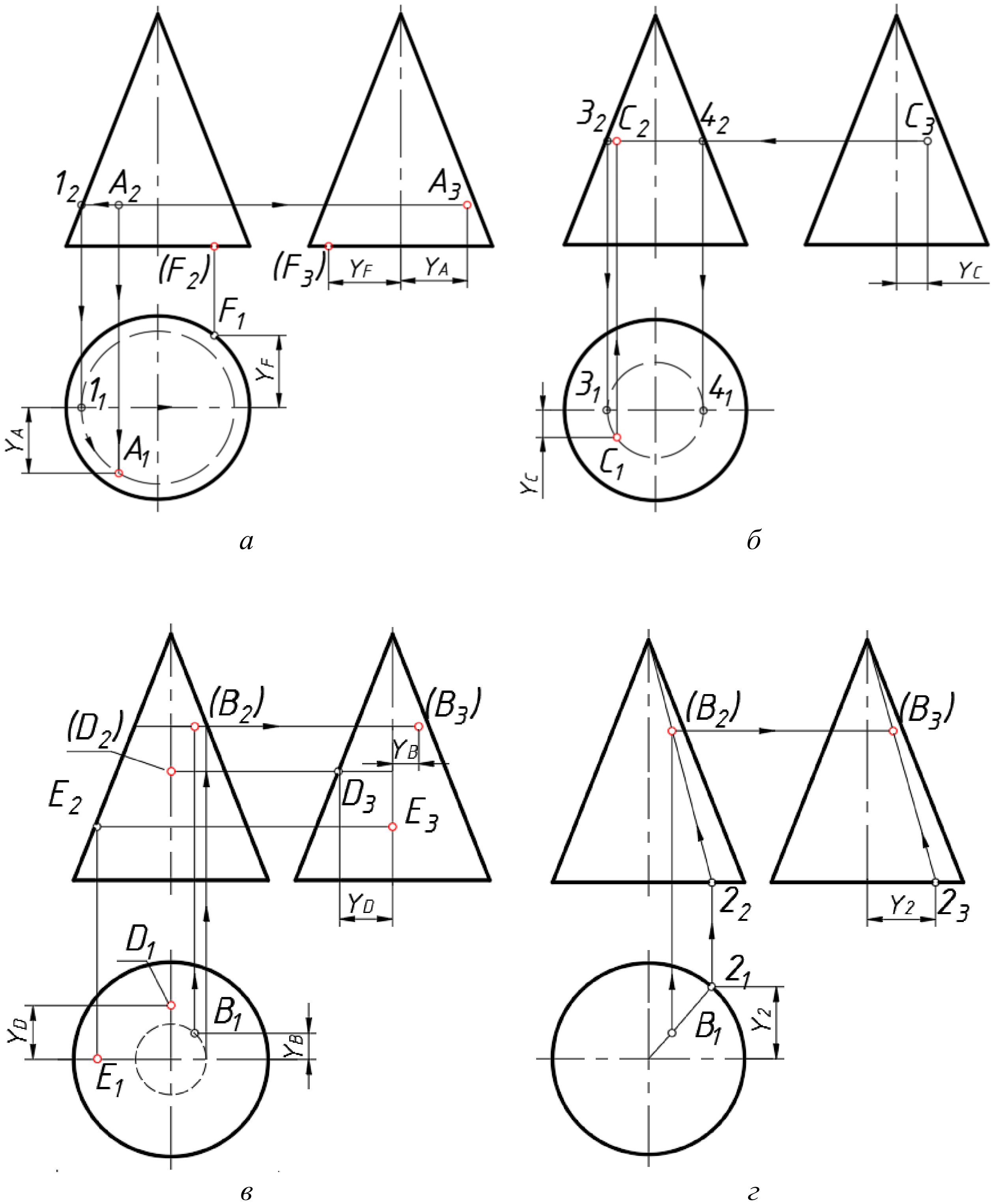


Рис.4.10

Сфера

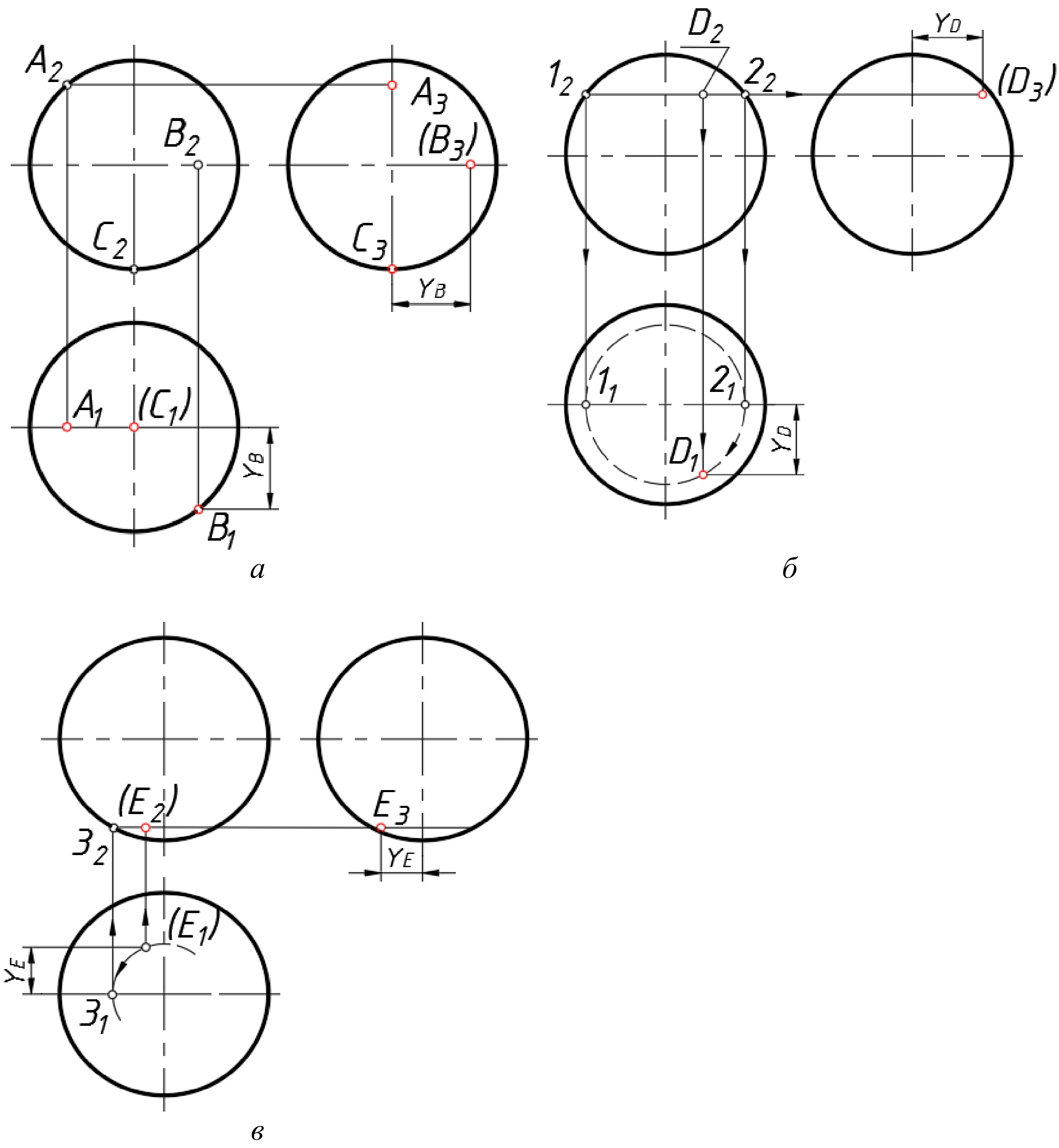


Рис.4.11

Піраміда

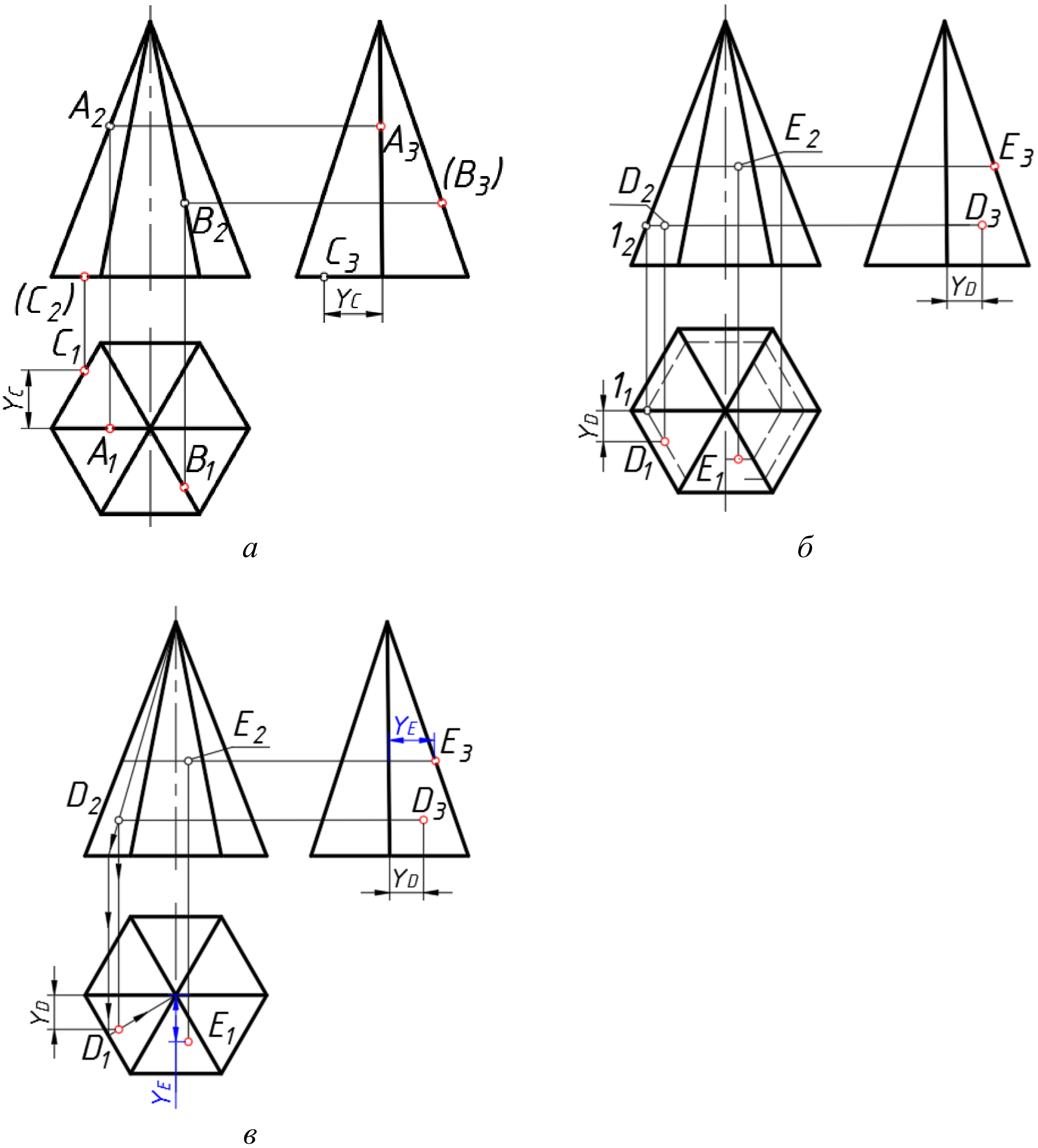


Рис. 4.12

Питання до теми лекції

1. Основні способи задання поверхонь.
2. Яка поверхня називається лінійчатою?
3. Яка поверхня називається поверхнею обертання?
4. Що є умовою належності точки поверхні?
5. Чому не можна використовувати лінійчату твірну для побудови проекцій точок на поверхні сфери?

Лекція 5. Перетин поверхонь площинами. Розгортки поверхонь

Основні поняття: *лінія перетину, характерні точки, точки видимості.*

У загальному випадку, при перетині поверхні з площиною утворюються плоскі криві лінії. Грані поверхні перетинаються з площиною по багатокутнику. У деяких окремих випадках, для лінійчатих поверхонь, коли площина перетинає поверхню по твірній, в перетині ми отримаємо пряму. Лінії перетину можуть бути побудовані за певними параметрами відомими графічними способами або за допомогою визначення необхідної кількості точок лінії перетину, виходячи з умови належності їх заданій поверхні.

В даному курсі розглядаються випадки перетину поверхонь площинами окремого положення.

Для визначення проекцій лінії перетину слід знайти проекції точок, що належать цій лінії.

Загальний алгоритм розв'язання задачі побудови лінії перетину поверхні площиною окремого положення.

1. Визначити вид поверхні.
2. Визначити спосіб розташування січної площини по відношенню до поверхні, і в залежності від цього, – форму лінії перетину.
3. Визначити форму проекцій лінії перетину.
4. Визначити проекції точок, що займають окреме положення:
    - характерні точки - точки, за якими можна побудувати всю лінію перетину (вершини, кінці діаметрів або найбільших хорд тощо);
    - екстремальні точки – найближча та найвіддаленіша точки відносно відповідної площини проекцій;
    - точки видимості – точки, що проекцюються на обриси поверхні.

5. За необхідності, побудувати проміжні точки, та з'єднати всі точки відповідною лінією, з урахуванням видимості. Частину ламаної, яка є невидимою на даній площині проекцій, зображають штриховою лінією.

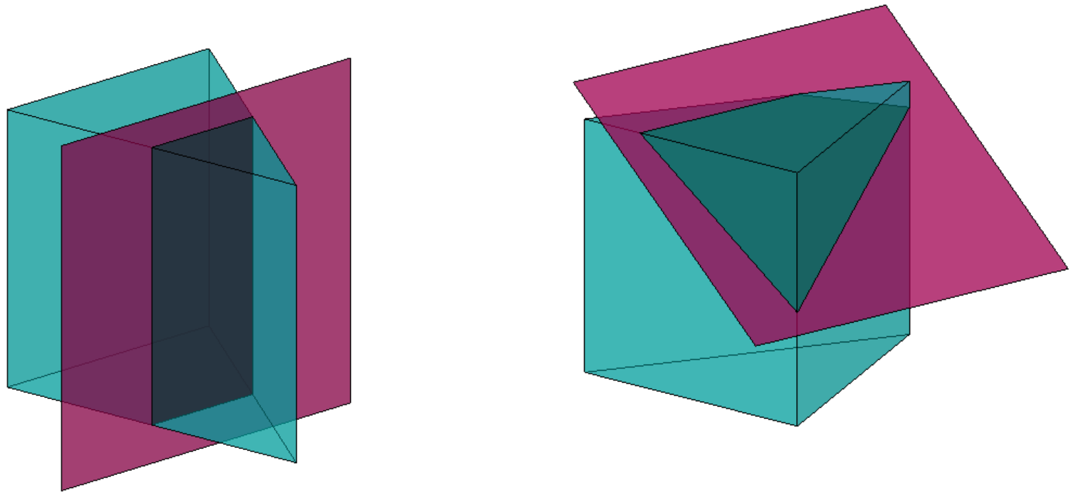
5.1 Перетин граної поверхні з площиною

При перетині граної поверхні з площиною утворюється ламана лінія.

Перетин поверхні призми площиною.

1. Вид поверхні: призматична (рис.5.1,*а*).
2. Форма лінії перетину.

В результаті перетину поверхні призми площиною може утворитися прямокутник (рис. 5.1,а), якщо ця площина паралельна бічним ребрам призми, або різного виду багатокутники (чотирикутник на рис. 5.1, б,), якщо площина не паралельна їм.



а *б*

Рис.5.1

3. Форма проекцій лінії перетину: для призми це відрізок або *n*-кутник.
4. Характерні точки: вершини *n*-кутника *A, A', B, B'* (рис.5.2).
5. Точки видимості: лінія перетину невидима на $П_3$ (рис5.2).
6. Побудова лінії перетину: з'єднати отримані проекції точок відрізками: суцільною лінією на $П_1$ і штриховою на $П_3$, в тій самій послідовності, в якій вони з'єднані на площині $П_2$.

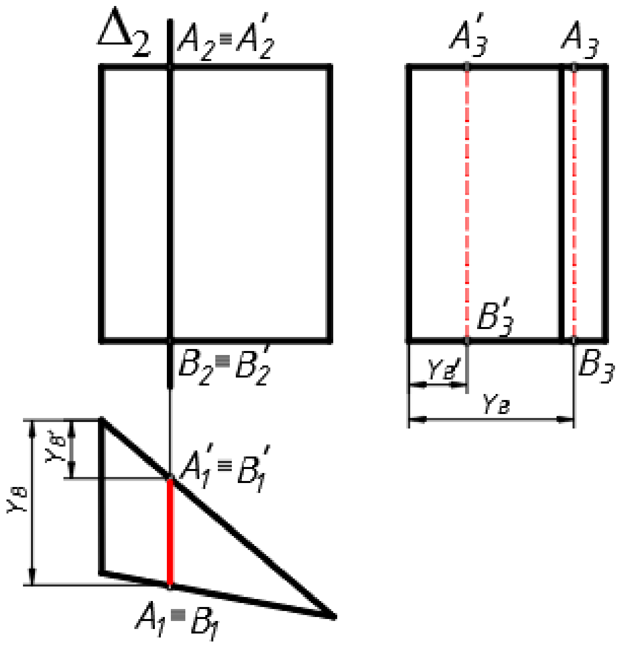


Рис.5.2

Перетин поверхні піраміди з площиною.

1. Вид поверхні: пірамідальна (рис.5.3)

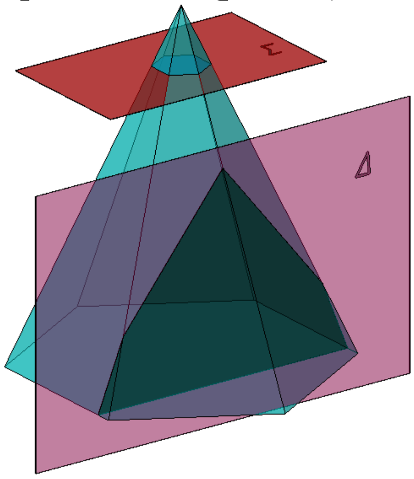


Рис.5.3

2. Форма лінії перетину.

При перетині січної площини з пірамідою утворюється ламана.

3. Форма проекцій лінії перетину: для піраміди це відрізок або *n*-кутник (рис5.4).

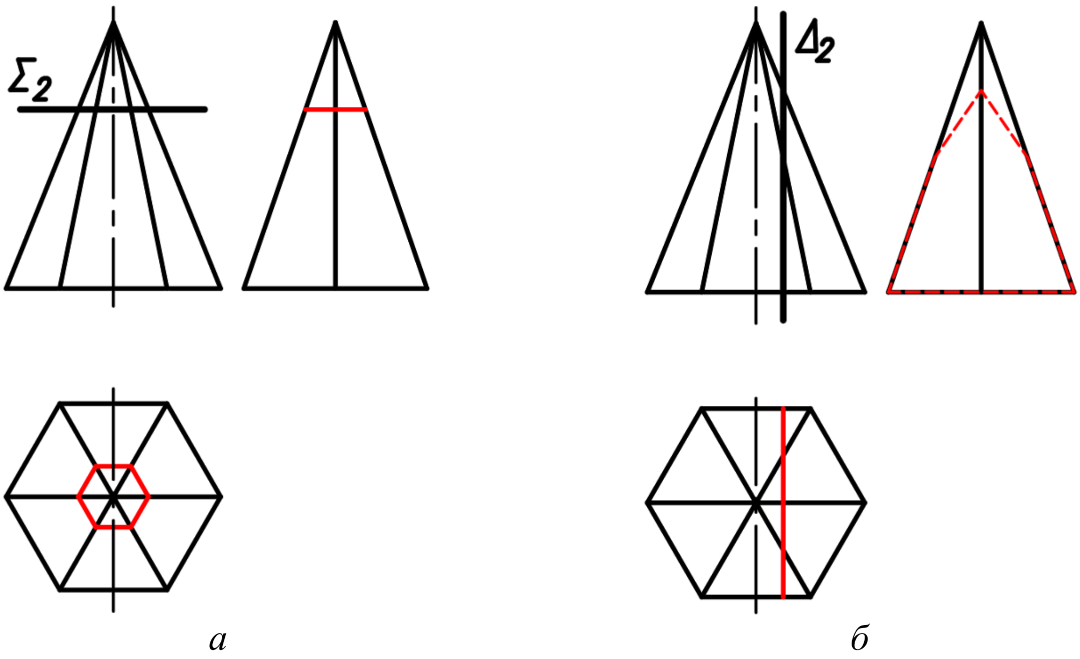


Рис.5.4

4. Точки окремого положення. Характерні точки: вершини *n*-кутника; вони співпадають з точками перетину площини з ребрами піраміди.
5. Побудова лінії перетину: з'єднати проекції вершин за допомогою відрізків, при чому невидиму частину - штриховою лінією (рис.5.4,*б*).

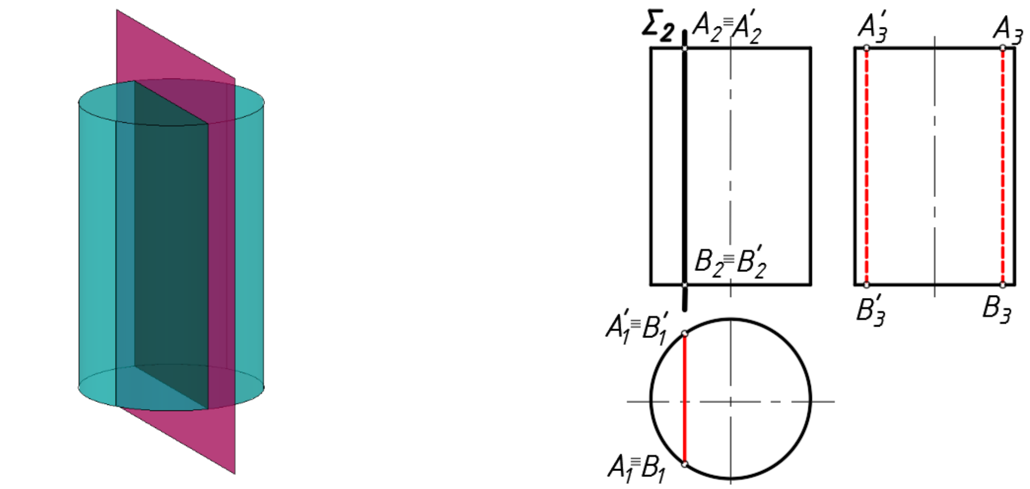
5.2. Перетин поверхні обертання з площиною

При перетині поверхонь обертання з площиною утворюються плоскі криві лінії, проекції яких будуються за проекціями опорних точок, що визначаються відповідними способами. Після цього визначається ряд проміжних точок, які потім з'єднуються характерною плавною кривою лінією.

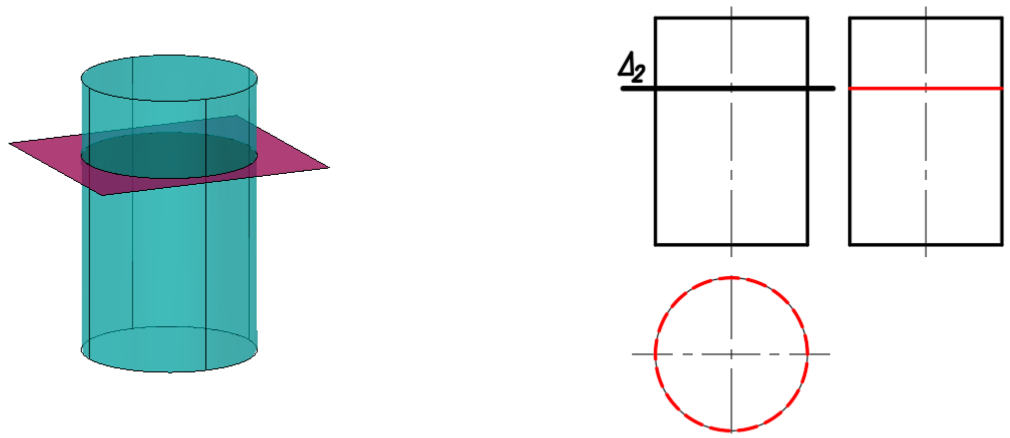
Перетин циліндричної поверхні з площиною

1. Вид поверхні: циліндрична (рис.5.5, 5.6).
2. Форма лінії перетину.

Форма лінії перетину залежить від кута нахилу площини по відношенню до твірних циліндра. Це може бути прямокутник, якщо площина паралельна до твірної (рис.5.5,*а*), коло, якщо площина перпендикулярна до твірної (рис5.5, *б*), і еліпс в інших випадках (рис.5.6, *а*, *б*).

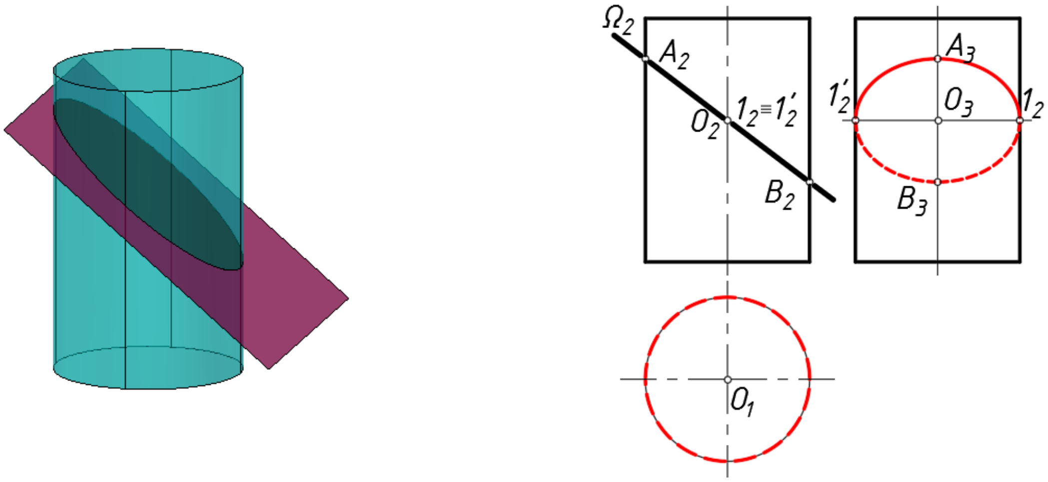


а

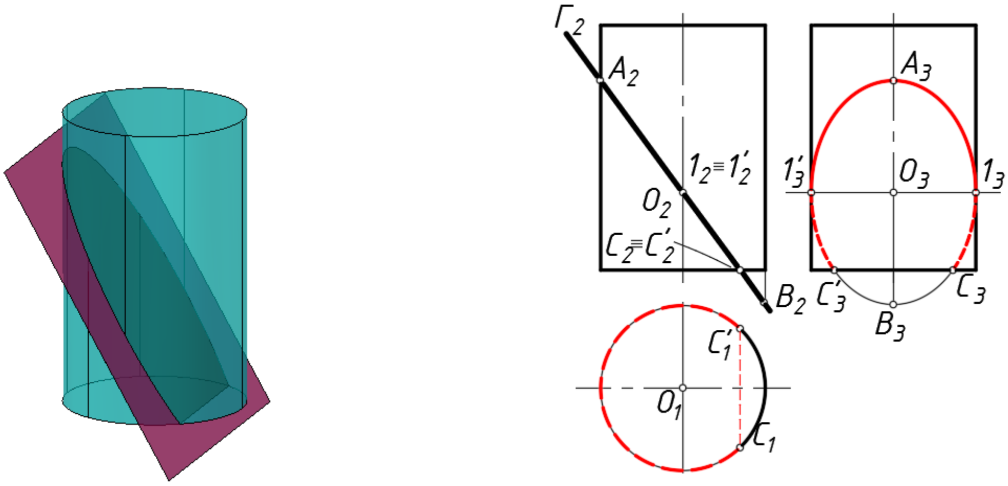


б

Рис.5.5



а



б

Рис.5.6

3. Форма проекцій лінії перетину. В залежності від форми лінії перетину, це може бути відрізок, прямокутник, коло, еліпс або його частина (рис.5.6,б)
4. Точки окремого положення.

Характерні точки. Для того, щоб побудувати проекції еліпса, необхідно визначити положення його центру (т. О на рис.5.6, *а*, *б* лежить на перетині площини з віссю обертання), а також побудувати проекції кінцевих точок великої і малої осей (т.т. А, В, 1 і 1′ на рис 5.6, *а*, *б*). Для неповного еліпса необхідно також визначити його граничні точки (т.т. С і С′ на рис. 5.6, *б*).

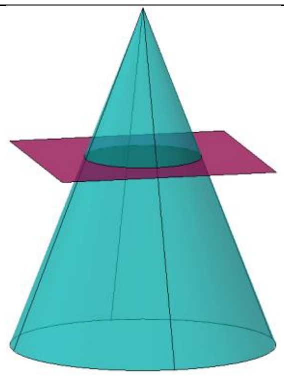
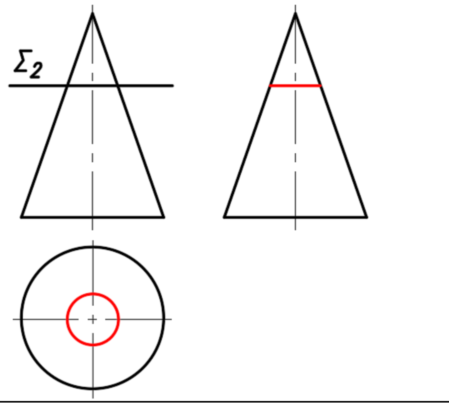
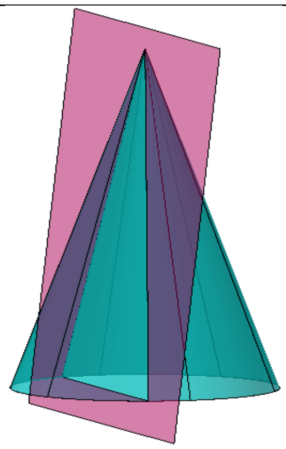
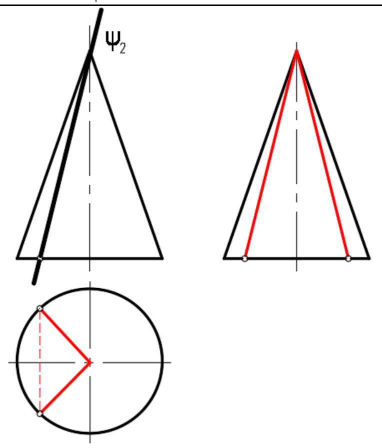
Точки видимості. На рис.5.6 *а*, *б* це точки 1 і 1′.

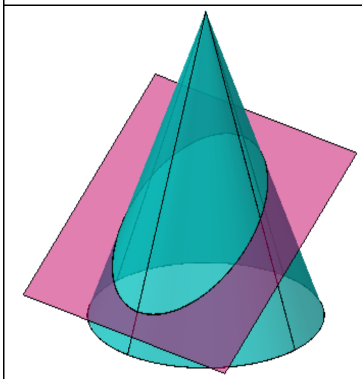
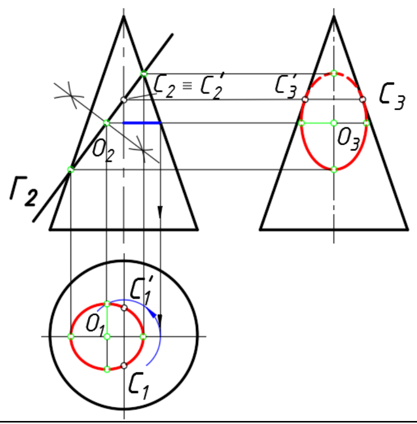
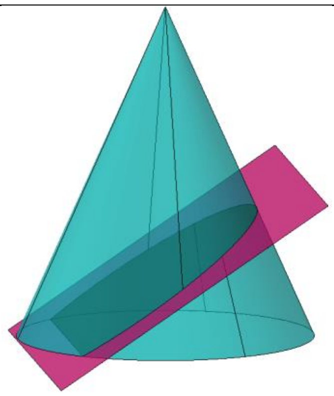
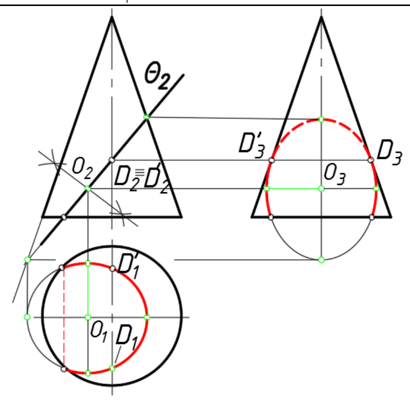
5. Побудова лінії перетину: з’єднати отримані проекції відповідними лініями, з урахуванням їх видимості.

Перетин конічної поверхні з площиною

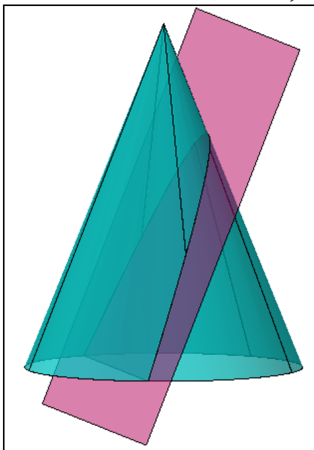
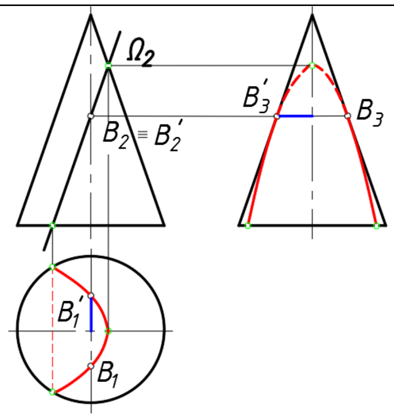
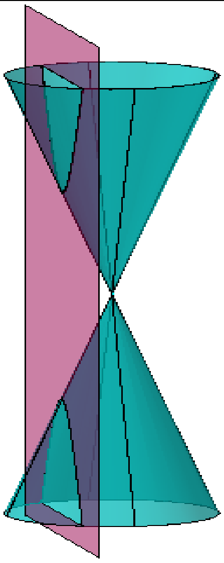
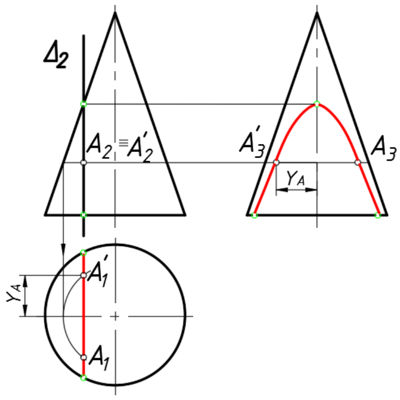
Конічна поверхня є найбільш складною, з точки зору можливих ліній перетину, поверхня. Можливі варіанти такого перетину наведено в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>$\Sigma \| \Pi_1$
В перетині – коло.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>Площина проходить через вершину конуса.

В перетині – дві твірні прямі.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td rowspan="2">Площина не паралельна твірній конуса.
В перетині – еліпс (зеленим позначено характерні точки – центр еліпса (точка О) і кінцеві точки на його осях,
точки С і С´, D і D´ – границі видимості).</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Таблиця 5.1, продовження

		Площина паралельна до твірної. В перетині – парабола (зеленим позначено характерні точки, точки B і B′ - границі видимості).
		Площина паралельна до двох твірних. В перетині – гіпербола (зеленим позначено характерні точки, точки A і A′ - проміжні точки, які допомагають побудувати криву більш точно).

Перетин сфери з площиною

Будь-яка площина перетинає сферу по колу (рис 5.7). Якщо січна площина паралельна площині проекцій, коло проецюється на цю площину проекцій без спотворення (рис 5.7, *а*, *б*). Якщо ж площина не паралельна до жодної з площин проекцій, проекціями будуть еліпси (рис.5.7, *в*, *г*).

Велика вісь цих еліпсів дорівнює діаметру кола (великою віссю еліпса є той діаметр кола перетину, який паралельний площині проекцій, проекція A_2B_2 на рис.5.7, *г*). Величина малих осей еліпсів залежить від кута нахилу січної площини до площин проекцій.

На рис 5.7, *в*, *г* зображена сфера, яку перетинає фронтально-проекцююча площина Ω. Ця площина перетинає сферу по колу з центром в точці O′. Проекція O'_2 – це точка перетину Ω_2 з перпендикуляром, опущеним з проекції O_2 центра сфери на площину Ω_2. Горизонтальна і профільна проекції цього кола – це еліпси, які можна побудувати за їх великою і малою осями (проекції A_1B_1 і A_3B_3 – малі осі, проекції C_1D_1=C_3D_3=A_2B_2 – великі осі). Точки 1 і 2 є границями видимості на $П_1$, точки 3 і 4 є границями видимості на $П_3$.

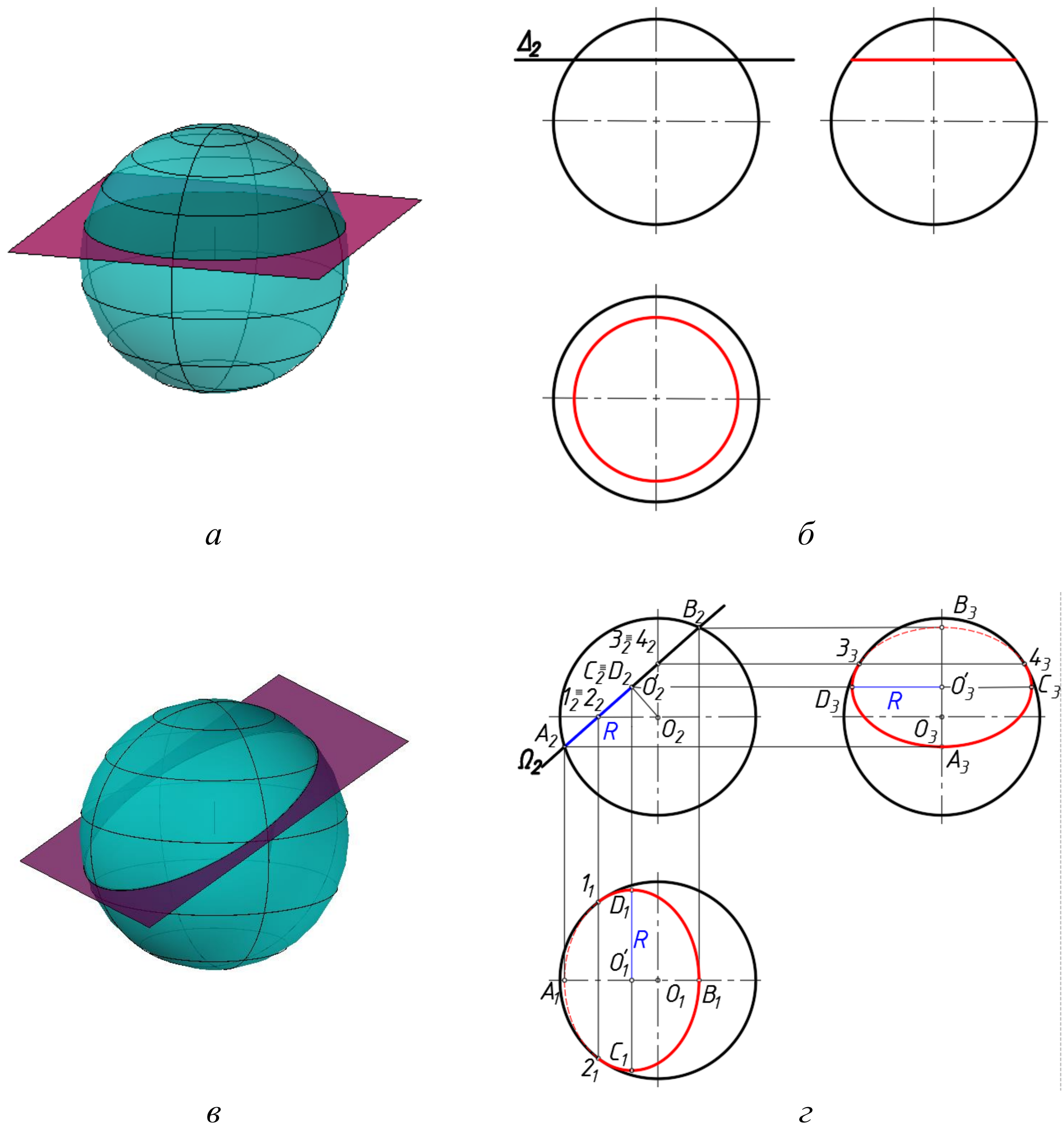
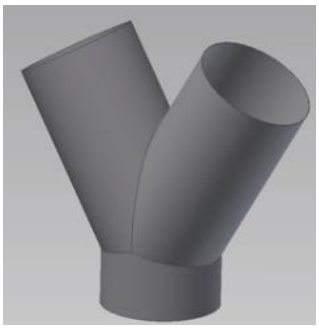


Рис. 5.7

5.3. Розгортки поверхонь

З розгортками поверхонь ми часто зустрічаємось на виробництві, в будівництві та в повсякденному житті. Для виготовлення кожухів машин, огорож верстатів, вентиляційних пристроїв, трубопроводів та інших виробів необхідно з листового матеріалу вирізати їх розгортки. Для цього необхідно будувати розгортки поверхонь призми, сфери та інших геометричних тіл. На рис. 5.8 приведено приклад розгортки Y-трійника трубопроводу.



а

б

в

г

Рис. 5.8 Y-трійник. *а* – модель трійника, *б* – поверхні, для яких будується розгортка, *в* і *г* – розгортки [4]
http://androidmafia.ru/video/u9xBqlUDyYQ

Розгорткою називається фігура, отримана в результаті поєднання поверхні даного тіла з площиною.

Для одних поверхонь розгортки можуть бути точними, для інших - наближеними. Точні розгортки мають всі багатогранники (призми, піраміди і ін.), циліндричні і конічні поверхні і деякі інші. Наближені розгортки мають сфера, тор і інші поверхні обертання з криволінійною твірною. Першу групу поверхонь називають розгортними, другу - нерозгортними.

При побудові розгорток багатогранників знаходять натуральну величину ребер і граней цих багатогранників за допомогою способу обертання або заміни площин проекцій. При побудові наближених розгорток поверхонь ділянки нерозгортних поверхонь замінюють близькими до них за формою розгортними поверхнями.

Щоб побудувати розгортку поверхні багатогранника, необхідно визначити натуральну величину його граней і послідовно накреслити їх на площині. Натуральні величини ребер граней, якщо вони спроектовані не в натуральну величину, знаходять способами обертання або зміни площин проекцій.

Побудова розгорток пірамідальних поверхонь зводиться до багаторазової побудови натуральної величини трикутників, з яких складається дана поверхня.

Незважаючи на те, що конічні поверхні є розгортними і, теоретично, мають точні розгортки, практично будують їх наближені розгортки. Для цього конічну поверхню замінюють вписаною в неї поверхнею піраміди, тобто розбивають її на трикутники (спосіб тріангуляції).

Побудова розгорток призматичних і циліндричних поверхонь призводить в загальному випадку до багаторазового побудови натурального виду трапецій, з яких складається дана призматична поверхня, або призматична поверхня, вписана (або описана) в циліндричну поверхню і замінює її. Якщо, зокрема, призматична або циліндрична поверхні обмежені паралельними твірними, то трапеції, на які розбивається поверхня, перетворюються в прямокутники або паралелограми, в залежності від того, перпендикулярні чи ні площини основ бічним ребрам або твірним поверхонь.

Сферична поверхня відноситься до нерозгортних поверхонь, тобто, вона не може бути суміщена з площиною, не зазнавши при цьому будь-яких пошкоджень (розривів, складок). Така поверхня може бути розгорнута лише наближено. На рис.5.8 наведено приклад наближеної розгортки глобуса.

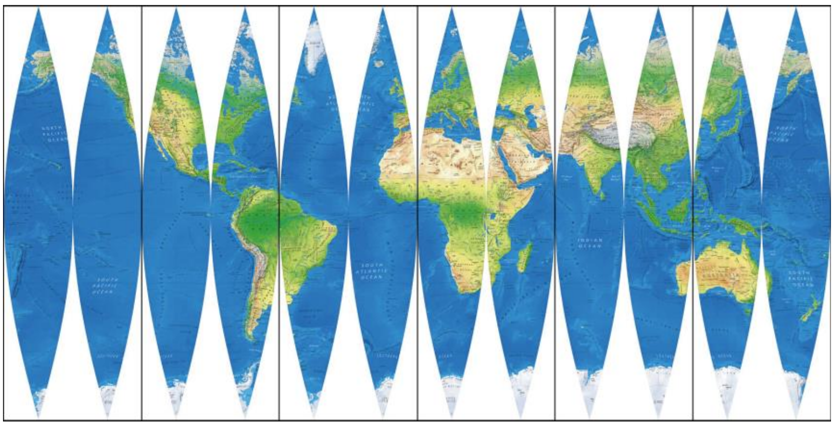


Рис.5.9

Питання до теми лекції

1. По яких лініях грані поверхні перетинаються з площиною?
2. Які лінії перетину циліндра з площиною? Конуса? Сфери?
3. Які точки є характерними? Навести приклади характерних точок поверхонь обертання.
4. Дати визначення розгортної і нерозгортної поверхонь. Навести приклади.

Використані джерела

1. Ванін В.В, Перевертун В.В, Надкернична Т.М., Власюк Г.Г. Інженерна та комп′ютерна графіка. К.: Вид.гр.BHV, 2009 – 400с.
2. https://uk.wikipedia.org/wiki/Гелікоїд/
3. http://esg.spb.ru/articles/106/
4. http://androidmafia.ru/video/u9xBqlUDyYQ
5. Hellmuth Stachel. Descriptive Geometry Meets Computer Vision -- The Geometry of Two ImagesJournal for Geometry and Graphics 10 (2006), No. 2, 137—153. Copyright Heldermann Verlag 2006

Список рекомендованої літератури

1. Ванін В.В., Перевертун В.В., Надкернична Т.М., Власюк Г.Г. Інженерна та комп′ютерна графіка. – К.: Вид.гр.BHV, 2009 – 400с.
2. Хмеленко О.С. Нарисна геометрія. Підручник. – К.: Кондор, 2008 р. – 440с.
3. Хаскін А.М. Креслення. – К.: Вища шк., 1976.

Зміст